Euclides

Vakblad voor de wiskundeleraar

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Wolters-Noordhoff

816
357
492

jaargang 68 1992 | 1993 januari

● Euclides ● ● ● ●

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 55,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 37,50; contributie zonder Euclides *f* 30,00. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

ISSN 01.65-0394

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel

en liefst voorzien te zijn van (genummerde) illustraties

- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 63,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 41,00. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 11,00 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
ACQUI' MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

Inhoud

5		X	X		X
4					
3					
2				X	
1	X				X
	1	2	3	4	5

Het bord met verboden posities.

● Bijdrage ● ● ● ●



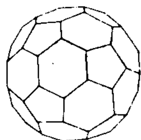
De Nederlandse Wiskunde Olympiade 1992 (eerste ronde)

J. W. van der Vaart

Opgaven

A4 Twee wielrenners doen mee aan een tijdrit. Aad, die als eerste start, rijdt constant 30 km/uur. Ben rijdt constant 36 km/uur. Als Ben start, passeert Aad een kerk. Op het moment dat Ben deze kerk passeert, finisht Aad. Tenslotte finisht Ben precies een half uur na Aad.
Hoe lang is het traject van de tijdrit?

A5 De meetkundige figuur waarop de huidige voetbal is gebaseerd bestaat uit een aantal regelmatige zeshoeken en twaalf regelmatige vijfhoeken (zie tekening).
Hoeveel ribben heeft de figuur?



A6 Van alle ongevallen gebeurt 30% op een nat wegdek. Het wegdek is 12% van de tijd nat. Persoon A neemt een uur aan het verkeer deel op een nat wegdek en heeft daarbij statistisch gezien een kans p op een ongeval. Persoon B neemt een uur aan het verkeer deel op een droog wegdek en heeft daarbij statistisch gezien een kans q op een ongeval.
Bepaal $\frac{p}{q}$

B1 Drie voetbalclubs spelen een hele competitie (ze spelen één maal uit en één maal thuis tegen elkaar) en hebben na afloop van de competitie alle drie evenveel punten verzameld (2 punten bij winst, 1 punt bij gelijkspel en 0 punten bij verlies).
Op hoeveel manieren kan deze competitie zijn verlopen bij gegeven wedstrijdschema?

B2 Op 20 maart 1990 vermenigvuldigt een wiskundelerares haar leeftijd met de leeftijd van haar echtgenoot en telt hierbij op de som van de leeftijden van haar kinderen. De uitkomst is 1545. Op 20 maart 1991 en 20 maart 1992 herhaalt ze de berekening. Op 20 maart 1991 is de uitkomst 1627.
Wat is de uitkomst op 20 maart 1992? (De samenstelling van het gezin is in de hele periode niet veranderd.)

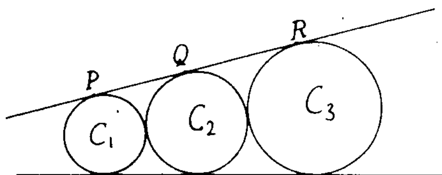
B3 In een kring staan n personen $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Nu begint een aftelspelletje met de woorden 'ga weg', te beginnen bij P_1. Wie met 'weg' wordt aangeduid is af en verdwijnt uit de kring. Zo verdwijnen achtereenvolgens $P_2, P_4, \ldots$ enz. Tenslotte blijft alleen P_n over. Bepaal de kleinste waarde van n die groter dan 20 is.

B4 Een emmer is gedeeltelijk gevuld met warm water. Er wordt 1 liter koud water uit de kraan aan toegevoegd. Hierdoor daalt de temperatuur van het water met 11 graden. Hierna wordt weer 1 liter koud kraanwater toegevoegd. De temperatuur daalt hierdoor met 6 graden.
Hoeveel liter water zat er in de emmer voor er koud water aan werd toegevoegd?

C1 voor welke waarde(n) van a heeft de vergelijking $a(x^3 - 2) = x(a^3 - 2)$ precies één oplossing?

C2 Alle getallen van zes verschillende cijfers die met de cijfers 1, 2, 3, 6, 8 en 9 kunnen worden geschreven, worden bij elkaar opgeteld.
Bepaal van deze som de ontbinding in priemfactoren.

C3 Drie cirkels C_1, C_2 en C_3 hebben twee gemeenschappelijke raaklijnen; C_1 en C_2 raken elkaar uitwendig, C_2 en C_3 raken elkaar uitwendig (zie figuur). De raakpunten van de drie cirkels op één lijn

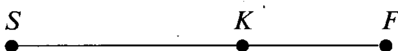


Figuur bij C3

zijn respectievelijk P, Q en R waarbij geldt $PQ = 2$ en $QR = 3$.
Bereken de straal van de kleinste cirkel.

Oplossingen

Opgave A4



Ben doet over KF een half uur, dus $KF = 18$ km.
Dus Aad doet over KF $\frac{18}{30}$ uur $= \frac{3}{5}$ uur.
Dus Ben doet over SK ook $\frac{3}{5}$ uur, dus $SK =$
$\frac{3}{5} \cdot 36\,\text{km} = 21{,}6\,\text{km}$.
Totale lengte dus $18\,\text{km} + 21{,}6\,\text{km} = 39{,}6\,\text{km}$.

Opgave A5
Er zijn 12 vijfhoeken, dus $12 \cdot 5 = 60$ hoekpunten. Er zijn dus $60 \cdot 3 = 180$ ribben die allemaal dubbel zijn geteld, dus aantal ribben $= 90$.

Opgave A6
Laten er gemiddeld $100x$ ongelukken in 100 uur gebeuren. Op een nat wegdek zijn dat gemiddeld $30x$ ongelukken in 12 uur, op een droog wegdek $70x$ ongelukken in 88 uur. De verhouding is

$$\frac{p}{q} = \frac{30x}{12} \cdot \frac{70x}{88} = \frac{22}{7}.$$

Opgave B1
Met afstand de meest bewerkelijke opgave.

Er zijn 5 gevallen die een gelijke eindstand opleveren:

	I	II	III	IV	V
A	040	040	121	121	202
B	040	121	121	121	202
C	040	121	121	202	202

– 040 betekent 0 gewonnen, 4 gelijk, 0 verloren.
– De categorieën II en IV leveren door cyclische verwisseling van A, B en C elk 3 gevallen.

Resultatentabel van de mogelijke 6 wedstrijden (G betekent gelijk, W betekent winst voor eerstgenoemd team, V betekend verlies voor eerstgenoemd team):

A-B	G	G	G	G	G	G	W	W	W	W	G	G	W	W	W	V	W
A-C	G	G	G	W	G	W	G	V	G	V	W	W	W	W	V	W	V
B-A	G	G	W	W	W	W	G	G	G	G	G	G	W	W	W	V	V
B-C	G	W	G	G	V	V	G	G	V	V	W	V	W	V	W	W	V
C-A	G	G	V	G	V	G	W	G	W	G	W	W	W	W	V	W	W
C-B	G	V	W	W	G	G	V	V	G	G	W	V	W	V	W	W	V

Alle kolommen op de eerste na leveren een extra mogelijkheid als W door V en V door W wordt vervangen.
Totaal aantal mogelijkheden =
N(I) + N(II) + N(III) + N(IV) + N(V) =
$1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 45$.

Opgave B2
Het gegeven komt neer op $vm + s = 1545$ en $(v + 1)(m + 1) + s + n = 1627$, met v de leeftijd van de vrouw in 1990, m de leeftijd van de man in 1990, s de som van de leeftijden van de kinderen in 1990 en n het aantal kinderen. Via aftrekking volgt $v + m + n = 81$, zodat
$(v + 2)(m + 2) + s + 2n =$
$1545 + 2 \cdot 81 + 4 = 1711$.

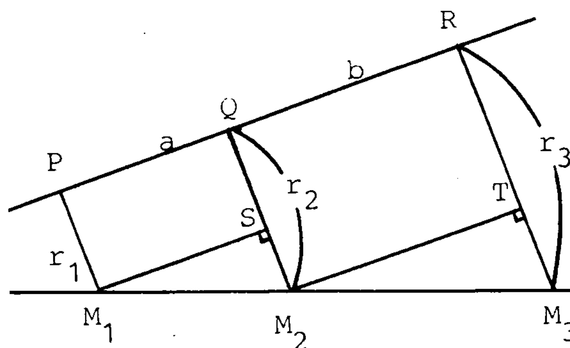
Opgave B3
Eerst worden alle even getallen geschrapt, dus n is oneven. Als het getal P_n bij elke schrapronde moet overblijven moet het aantal resterende getallen na de eerste schrapronde, na elke volgende schrapronde even blijven!
Dat kan alleen als het getal n in de vorm $2^k - 1$ is te schrijven!
De eerste n groter dan 20 is $2^5 - 1 = 31$.

Opgave B4
Stel de emmer bevat x liter warm water van y graden en de temperatuur van koud water is z graden.
Dan geldt:
$$\frac{x \cdot y + 1 \cdot z}{x+1} = y - 11 \text{ dus } z = -11x + y - 11 \quad (1)$$
Verder geldt:
$$\frac{(x+1)(y+1) + 1 \cdot z}{x+1+1} = y - 11 - 6 \text{ dus}$$
$$z = -6x + y - 23 \quad (2)$$
Uit (1) en (2) volgt:
$-11x + y - 11 = -6x + y - 23$ dus $x = 2{,}4$ liter.

Opgave C1
$a(x^3 - 2) = x(a^3 - 2)$
$ax^3 - 2a = xa^3 - 2x$
$ax^3 - xa^3 - 2a + 2x = 0$
$ax(x^2 - a^2) + 2(x - a) = 0$
$(x - a)(ax^2 + a^2x + 2) = 0$
$x = a \vee ax^2 + a^2x + 2 = 0$
Deze vergelijking mag geen oplossingen hebben (1) of 1 oplossing die gelijk is aan de oplossing $x = a$ (2)
(1) $a = 0$ levert geen oplossing.
$a \neq 0 \wedge D < 0$ levert $0 < a < 2$.
(2) $a \neq 0 \wedge D = 0$ levert $a = 2$, maar die vervalt, want in dat geval is de oplossing $x = -1$ en niet $x = 2$.
Conclusie: $0 \leqq a < 2$.

Opgave C2
Er zijn $6! = 720$ getallen van deze 6 cijfers. Van die 720 getallen eindigen er $720 : 6 = 120$ op een 9, 120 op een 3 enzovoort.
Dat geldt ook voor het eerste, tweede cijfer enzovoort. De som van al die getallen wordt dus
$120 \cdot (1 + 2 + 3 + 6 + 8 + 9)$.
$(100000 + 10000 + 1000 + 100 + 10 + 1) =$
$2^3 \cdot 3 \cdot 29 \cdot 111111 = 2^3 \cdot 29 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 1001 =$
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 37$.

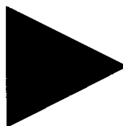
Opgave C3
In ΔM_1M_2S geldt $a^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_2 + r_1)^2$ waaruit volgt dat $a^2 = 4r_1r_2$.



Uit gelijkvormigheidsoverwegingen volgt dat $\frac{a}{b} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_2}{r_3}$, en daarmee $r_2 = \frac{b}{a}r_1$. We vinden
$a^2 = 4r_1r_2 = 4r_1^2\frac{b}{a}$, en dus $r_1 = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{a}{b}}$.
In ons geval is $a = 2$ en $b = 3$, dus $r_1 = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

Noot

De opgaven A1, A2 en A3 (met oplossingen) zijn afgedrukt in Euclides 68-4.



Mededeling

Aanmelding voor Staatsexamen Wiskunde m.o.-A of wiskunde m.o.-B.

De minister van onderwijs en wetenschappen
maakt aan belanghebbenden bekend dat degene die in 1993 wil deelnemen aan het staatsexamen wiskunde m.o.-A of -B, af te nemen door de *Algemene Examencommissie* zich vóór 1 mei 1993 dient aan te melden – uitsluitend door middel van een briefkaart – bij de voorzitter van de Algemene Examencommissie Wiskunde M.O., de heer prof. dr. A.W. Grootendorst, Aardbeistraat 11, 2564 TM Den Haag, met vermelding van de volledige naam en het adres van de kandidaat en met nauwkeurige vermelding van de onderdelen die de kandidaat wenst af te leggen. Na 1 mei 1993 ontvangen de aangemelde kandidaten nadere instructies van de examencommissie.
Het schriftelijke gedeelte van het examen (zowel A als B) wordt afgenomen op donderdag 26 en vrijdag 27 augustus 1993.
De kandidaten worden geëxamineerd volgens het programma, zoals omschreven in het 'Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde', jrg. 63, afl. 2, november 1975, bldz. 86-93. Men kan dit programma verkrijgen door storting van ƒ3,50 op girotrekening 172007 t.n.v. de voorzitter van de Algemene Examencommissie Wiskunde M.O. te Den Haag onder vermelding van 'examenprogramma A' (resp. B).

● Serie ● ● ● ● ●

'Ontwikkelingen in de didactiek'

▶ Leren en Helpen Leren (II)

Bram Lagerwerf

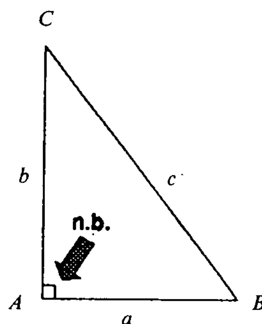
Wiskundedocenten helpen leerlingen die wiskunde leren. Dat kan beter gaan wanneer de docent zo'n beetje weet hoe dat leren bij de leerlingen verloopt. Daar zijn allerlei theorieën over. In dit artikel en het vorige in de serie vindt u een beschrijving van denkbeelden die de vernieuwingen in het wiskundeonderwijs ondersteunen, en consequenties daarvan voor het onderwijzen van wiskunde op school. In het vorige artikel stonden vooral voorbeelden; deze keer gaat het om de theorie.

THEORIE

Wanneer ik een probleem heb waarbij de stelling van Pythagoras de oplossing kan bieden, dan haal ik in mijn geheugen die stelling en de bijbehorende werkwijze op, en dan kan ik zonder daar diep over te hoeven nadenken het probleem oplossen. Ik moet dan wel eerst zien dat er in de probleemsituatie een rechthoekige driehoek is waarvan twee zijden bekend zijn: de structuur die ik aanbreng in het probleem moet dezelfde zijn als de structuur van de stelling die ik wil gebruiken.
Wanneer je op die manier gebruik kunt maken van wiskundige verworvenheden scheelt dat een hoop werk.

In het vorige artikel heb ik een paar voorbeelden laten zien van hoe leerlingen zich zo'n wiskundige structuur eigen kunnen maken.
Het begint met het vormen van een *globaal beeld* doordat de leerlingen in diverse probleemsituaties dezelfde *structuur* herkennen. Het globale beeld wordt vervolgens steeds verder *geschematiseerd.* Het begin daarvan is het met woorden en een plaatje beschrijven van het globale beeld, zie figuur 1; daarna worden allerlei details benoemd en ontdekt, en er worden verbanden gelegd. Ook bij deze schematisering wordt uitgegaan van concrete problemen waarin de leerling op den duur dezelfde structuur herkent. Het resultaat is een wiskundige structuur die de leerling zich heeft eigen gemaakt, de leerling kan die met woord en beeld beschrijven, en in nieuwe problemen toepassen. Het vervolg op de schematisering is het ontwikkelen van een logische structuur; dat is veelal vakwerk voor wiskundigen.

We moeten nu wat preciezer kijken naar wat er in de leerling omgaat bij de hier boven beschreven leerprocessen.
Drie dingen verdienen hierbij de aandacht:
- het structureren,
- het vormen en schematiseren van beelden, en de logische opbouw,
- de eigen rol die beeld en taal daar elk bij spelen.



Meet de lengten van de twee rechthoekszijden, en doe die in het kwadraat. Tel die twee kwadraten op, dan krijg je het kwadraat van de lengte van de schuine zijde. Zo kun je de lengte van *BC* uitrekenen als je de lengten van *AB* en *AC* weet.
Het kan ook met aftrekken: bijvoorbeeld de lengte van *AB* uitrekenen als je de lengten van *BC* en *AC* weet.

Figuur 1

Het Structureren

Structureren is het verdelen van de aandacht met een doel voor ogen: door de aandacht anders te verdelen kan een kijk op het probleem ontstaan waardoor de leerling ineens ziet wat hij doen moet. Hij let bij het structureren niet alleen op dingen die te zien zijn, maar ook op verbanden, onderlinge verhoudingen: gelijke of evenwijdige lijnstukken, getallen die volgens een formule samenhangen, loodrechte stand, symmetrie.
Het is de kunst daarbij zowel de grote lijnen als de details in de gaten te kunnen houden en desgewenst snel te kunnen wisselen tussen die twee.

Het vormen en schematiseren van beelden, en de logische opbouw

De leerlingen doen ervaring op in allerlei probleemsituaties. Aanvankelijk zijn voor hen vooral de verschillen opvallend. Op den duur, zonodig geholpen door de docent, zien ze echter dat het steeds dezelfde structuur is die tot de oplossing van het probleem leidt. Er ontstaat een globaal beeld van het begrip dat aan de orde is. Het is belangrijk dat zo'n globaal beeld de leerlingen helder voor ogen staat en loskomt van de verschillende probleemsituaties waarin ze ervaring hebben opgedaan. Het heeft niet veel zin een beeld te gaan schematiseren dat nog maar vaag aanwezig is.
Woord en beeld zijn gekoppeld: wanneer de docent de naam noemt, roept dat voor de leerlingen het beeld op. Ze kunnen er dan ook zelf wel concrete voorbeelden bij geven, oude of nieuwe.

In de wiskunde willen we meestal verder gaan dan de herkenning van het globale beeld, we willen het schematiseren tot een wiskundige structuur. Dat begint met de beschrijving van het globale beeld; met woorden maar liefst ook met een plaatje erbij. Dan terug naar de werkelijkheid; opnieuw probleemsituaties structureren. Door opnieuw, preciezer, naar de concrete werkelijkheid te kijken ontstaan beelden van details, die er eerst niet waren en er worden verbanden gelegd. Er begint een wiskundig taalgebruik te ontstaan. De leerlingen leren beter te kijken, meer te zien. De globale beelden worden beter toegankelijk; taal speelt daarbij een grote rol. Dat allerlei verbanden ook logisch kunnen worden gelegd komt later.

De wiskundige structuur die uiteindelijk ontstaat is niet voor alle leerlingen gelijk. Veel leerlingen komen bijvoorbeeld niet toe aan algemene formuleringen met x en y. Probeert de docent te snel of te ver te gaan met schematiseren dan haken er leerlingen af: ze proberen vaak nog wel de docent ter wille te zijn, maar wat ze leren is napraten; ze maken zich de structuur niet eigen.
De verworven wiskundige structuur wordt een onderdeel van de werkelijkheid van de leerlingen; in nieuwe situaties wordt die herkend en kan die worden toegepast. Schematiseren is vaak een langlopend geleidelijk leerproces.

De derde stap is de logische opbouw. Daarvoor moet men goed thuis zijn in de onderhavige wiskundige structuur. Er moeten uitgangspunten en definities worden ontworpen, stellingen geformuleerd en bewijzen geleverd. Dat is werk van hoog wetenschappelijk gehalte; daar komen hooguit misschien vwo-leerlingen aan toe. Het is werk van een ander karakter dan het opbouwen van een wiskundige structuur. Voor het toepassen geeft het weinig steun als de leerling een bewijs kan leveren. Dat wil niet zeggen dat er niet geredeneerd wordt in de klas. Voor het schematiseren is het van groot belang dat de leerlingen overtuigd zijn van de kwaliteit van hun werk, en dat zij daar redeneringen voor hebben. Dat zijn echter geen strikt logische redeneringen, daar spelen nog vaak plaatjes een rol in en voorbeelden en modellen. In de strikt logische opbouw gaat het om bewijzen, dat komt na de overtuiging; plaatjes spelen daarin geen doorslaggevende rol meer, de taal voert de boventoon!

Beeld en Taal

Soms zie ik iemand die ik wel herken, maar van wie ik niet op de naam kan komen.Soms kan ik wel een beschrijving geven van iets maar weet ik niet meer

hoe dat ook al weer heet. Andersom gebeurt het dat ik iets lees en niet meer weet wat dat betekent. Ik probeer het dan terug te vinden; wanneer dat lukt is mijn reactie: O ja, dat is waar ook!

In deze gevallen beschik ik zowel over een beeld als over het bijpassende woord maar kan ik de verbinding niet zo gauw leggen. Woorden en beelden zijn als het ware in verschillende afdelingen vastgelegd en worden niet altijd automatisch met elkaar verbonden. Ik noem twee dingen om in de gaten te houden:

Wat we doen is vooral gebaseerd op de beelden die we hanteren.
Wanneer de docent tegen een leerling zegt: Teken eens een parallellogram!, kan het zijn dat die vraagt: Wàt moet ik tekenen? Het woord *teken* heeft wel het beeld opgeroepen van een actie met potlood en liniaal, maar het woord *parallellogram* heeft geen beeld opgeroepen. Het is niet doorgedrongen tot (het beeldgeheugen van) de leerling. De docent zegt het nog een keer: Een parallellogram!, en de leerling antwoordt nu: O, een parallellogram!, en gaat aan de slag. Voor de communicatie is het dus erg belangrijk dat er goede verbindingen zijn tussen het beeldgeheugen en het taalgeheugen. Wat helpt is bijvoorbeeld dat de leerlingen beschrijven wat ze doen of deden, of van plan zijn om te doen, en dat ze aangeven waarom. Maar communicatie gaat niet altijd via de taal. Dikwijls volgt het handelen automatisch op de beelden (in brede zin) die je waarneemt. Daarbij neemt het beeldgeheugen meestal voorrang op het taalgeheugen. Rokers die behoefte aan een sigaret voelen (en wel weten dat roken ongezond is maar daar geen duidelijke beelden bij hebben) nemen een sigaret.

Nieuwe beelden kunnen moeilijk via louter taal worden gevormd.
Juist als het om een nieuw begrip gaat is er nog geen verbinding tussen het taal- en het beeldgeheugen. Nieuwe beelden ontstaan door het opdoen van ervaring, met name door het (her)structureren van probleemsituaties. Het benoemen van de beelden vult daarnaast het taalgeheugen en bevordert de koppeling van woord en beeld.

Ook veranderingen in bestaande beelden gaan vaak moeizaam via louter taal. Wanneer het woord wiskunde bij een leerlinge het beeld oproept van: *moeilijk, voor jongens, niets voor mij,* dan is dat niet met een paar woorden van de docent verholpen.

Demagogen en verhalenvertellers verstaan de kunst door hun taal de luisteraar nieuwe beelden voor te schotelen. Ze hebben een beeldend taalgebruik; ze kennen hun luisteraars en weten bij hen de juiste beelden op te roepen om het nieuwe beeld mee op te bouwen. Het kan dus wel, maar juist bij demagogen en verhalenvertellers verwacht je geen kritische luisteraars. Binnen het wiskundeonderwijs wil je dat wel en is het daarom beter beelden op eigen ervaringen te baseren.

Wat ik hier beschrijf heeft gevolgen voor het taalgebruik van docenten en leerlingen.
Bij het vormen van nieuwe beelden en structuren is het belangrijk dat de docenten taal gebruiken die de leerling aanspreekt. Ze moeten dus weten waarop de leerling aanspreekbaar is. Je kunt niet zomaar elk willekeurig nieuw onderwerp aansnijden, je moet ergens bij aan kunnen sluiten. Docenten hebben bij de woorden die ze gebruiken duidelijke beelden voor ogen, het is echter maar de vraag welke beelden die woorden bij de leerlingen zullen oproepen. Is dat bij de leerlingen niet in orde, dan is de vorige fase nog niet klaar en moet dááraan worden verder gewerkt.
De leerlingen moeten de gelegenheid krijgen hun eigen taal met de nieuwe beelden te verbinden. Nog niet de plechtige vaktaal, maar: zeg het nu eens in je eigen woorden. Eenvoudige taal gebruiken is voor veel docenten niet eenvoudig. Eerder heb ik de belangrijkste valkuilen beschreven[1]. Daarin gaat het echter niet alleen over het al of niet gebruiken van vaktaal maar ook over moeilijk of gemakkelijk alledaags Nederlands. Natuurlijk zullen leerlingen ook moeten leren met moeilijker geschreven of gesproken teksten om te gaan, aan zulke teksten valt in het leven niet te ontkomen. Vraag de leerlingen het gelezene of gehoorde in eigen woorden te herhalen, of er zelf (voor)beelden bij te bedenken. Zoek samen naar hoofd- en bijzaken in de tekst, en naar verbanden daartussen.
In dit artikel kan ik daar niet verder op ingaan.

Bij de beeldvorming en bij de schematisering speelt het structureren een belangrijke rol en dat is verbonden met actie; mensen structureren nu eenmaal met het oog op wat ze moeten doen. Daarbij is actietaal nodig, die gebruiken de leerlingen zelf ook. Kijk bijvoorbeeld in het vorige artikel naar hoe ze een rechthoek en een vergelijking 'beschrijven'. Niet de definitietaal met 'Een rechthoek is ...', maar 'Je doet eerst dit en dan doe je dat en dan heb je een rechthoek'.

In de loop van het leerproces worden nieuwe structuren losgemaakt van de concretere probleemsituaties. Dan doet ook de vaktaal zijn intrede met nieuwe woorden, of bestaande woorden die een preciezere betekenis krijgen. Vaktaal en taal van de leerling worden dan een poos door elkaar gebruikt. De docent kan dan ook aan de leerling gaan vragen: Kun je het wat preciezer / wiskundiger / korter zeggen? Het is de combinatie van preciezere taal en beter kijken naar de werkelijkheid die de globale beelden beter toegankelijk maakt.

De logische opbouw is de triomf van de taal. Ging het in de eerste fase vooral om de beelden en in de tweede om de koppeling van woord en beeld, nu is het doel: precies en logisch onder woorden te kunnen brengen wat je beoogt, geen dubbelzinnigheden, duidelijkheid over wat meetelt en wat niet, precies weten welke argumenten toegelaten zijn en welke dus niet. Dat is het einde van een lange weg; zover komen de meesten niet.

Noot

1 Bram Lagerwerf, Taalproblemen, *Nieuwe Wiskrant* juli 1992; zie ook Jan Muthert in *Euclides* 68-2 en eerder in 66-9.

▶ Permutaties op een schaakbord

Rob Bosch

Vijf paarden lopen een race. Wat is de kans dat iemand de aankomstvolgorde goed voorspelt (aannemende dat hij de deelnemende paarden niet kent en derhalve zomaar wat invult)? Een leerling die wiskunde A in zijn pakket heeft zal een dergelijke opgave zonder veel moeite kunnen oplossen. Stel nu dat een persoon na afloop van de race de uitslag probeert te raden en dat hij dan inmiddels over bepaalde informatie beschikt met betrekking tot de uitslag, bijvoorbeeld paard A eindigt niet als eerste, de paarden B en C werden niet laatste, paard D niet tweede en paard E eindigde op een van de plaatsen 3, 4 of 5. Is de kans (hier een voorwaardelijke kans) dat de aankomstvolgorde goed geraden wordt nu weer eenvoudig te berekenen? Volgens sommigen aan wie ik de vraag voorlegde was dat zeker het geval. Wel, we zullen zien. De lezer probere eerst op zijn eigen wijze een antwoord te vinden op de gestelde vraag.

1 Permutaties met verboden posities

Een permutatie van 1, 2, 3 . . ., n kan worden voorgesteld op de volgende wijze. Neem een $n \times n$ schaakbord en plaats een toren op het veld in de i-de rij en de j-de kolom als het getal i in de permutatie op de j-de plaats staat (zie figuur 1).

5		T			
4					T
3			T		
2	T				
1				T	
	1	2	3	4	5

De permutatie 25314

5					T
4		T			
3			T		
2				T	
1	T				
	1	2	3	4	5

De permutatie 14325

5					T
4				T	
3			T		
2		T			
1	T				
	1	2	3	4	5

De permutatie 12345

Figuur 1

Een permutatie van n getallen correspondeert met het plaatsen van n torens op een $n \times n$ schaakbord zodat geen tweetal elkaar kan slaan (zoals bekend beweegt een toren zich horizontaal en verticaal).

Bij het in de inleiding genoemde probleem zijn echter niet alle permutaties toegestaan. Zo mag A niet op de eerste positie, B niet op de laatste enz., enz. We zoeken hier dus alle permutaties van 1, 2, .., 5 waarbij 1 niet op de 1e, 2 en 3 niet op de 5e, 4 niet op de 2e en 5 niet op de 1e of 5e plaats staat. We noemen dit een permutatie met verboden posities. Een dergelijke permutatie correspondeert weer met het plaatsen van torens – die elkaar niet kunnen slaan – op een schaakbord waarbij enkele velden verboden zijn d.w.z. op deze velden mag geen toren geplaatst worden. Het schaakbord voor het bovenstaande probleem is gegeven in figuur 2a. In de figuur zijn de verboden velden van een kruis voorzien. De niet verboden velden van het schaakbord noemen we open velden.
Voor een $n \times n$ bord waarop willekeurig een aantal velden aangewezen zijn als verboden velden lijkt het bijna onmogelijk het totaal aantal posities van de torens te bepalen. In de volgende paragraaf zullen we echter zien dat we een dergelijk bord kunnen terugbrengen tot een aantal eenvoudiger borden.

2 Het torenpolynoom

Zij C een $n \times n$ schaakbord met m open velden (uiteraard is $m \leqslant n^2$). Voor iedere k definiëren we $t_k(C)$ als het aantal mogelijkheden om k torens op het bord C te plaatsen; in het vervolg verstaan we hieronder het zó plaatsen van de torens dat geen tweetal elkaar kan slaan.
Voor het bijzondere geval dat $k = 0$ spreken we af dat $t_0(C) = 1$.
Direct duidelijk is dat $t_1(C) = m$ en dat $t_k(C) = 0$ als $k > m$. Bij ieder bord C definiëren we nu het torenpolynoom door

$$T_C(x) = t_0 + t_1x + t_2x^2 + .. + .. + t_mx^m$$

(Hierin hebben we kortheidshalve t_k geschreven voor $t_k(C)$).

5		X	X		X
4					
3					
2				X	
1	X				X
	1	2	3	4	5

Het bord met verboden posities.

5		X	X	T	X
4			T		
3					T
2	T			X	
1	X	T			X
	1	2	3	4	5

De permutatie 21453

5	T	X	X		X
4		T			
3			T		
2				X	T
1	X			T	X
	1	2	3	4	5

De permutatie 54312

Figuur 2

Voor een aantal borden is het niet moeilijk het torenpolynoom te berekenen. Voor een $n \times n$ bord zonder verboden velden gaat dat als volgt. Nemen we als voorbeeld een 4×4 bord C. Voor het bepalen van het polynoom moeten de getallen $t_k(C)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 16$ worden berekend. Duidelijk is dat $t_k(C) = 0$ als $k > 4$. Voor $k = 0, 1 \ldots, 4$ kunnen de coëfficiënten $t_k(C)$ direct berekend worden door op te merken dat we om k torens op het bord te plaatsen k rijen moeten kiezen, een toren kan in de eerst gekozen rij op vier manieren geplaatst worden, een tweede toren in de volgende gekozen rij op drie manieren enz. Dus

$$t_0(C) = \binom{4}{0},\ t_1(C) = \binom{4}{1}.4,\ t_2(C) = \binom{4}{2}.4.3$$

$$t_3(C) = \binom{4}{3}.4.3.2,\ t_4(C) = \binom{4}{4}.4.3.2.1$$

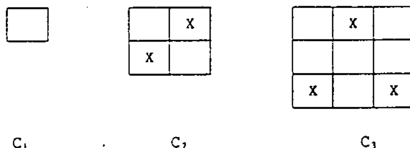
Het torenpolynoom van C is derhalve

$$T_C(x) = 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4$$

Voor een $n \times n$ bord C vinden we op een zelfde wijze

$$T_C(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 k!\, x^k$$

Na enig puzzelen kunnen we het torenpolynoom van eenvoudige borden meestal wel vinden. Zo kan de lezer gemakkelijk nagaan dat de torenpolynomen van de in figuur 3 gegeven borden resp. $T_{C_1}(x) = 1 + x$, $T_{C_2}(x) = 1 + 2x + x^2 = (1 + x)^2$ en $T_{C_3}(x) = 1 + 6x + 8x^2 + 2x^3$ zijn.



Figuur 3

Bij moeilijker borden faalt een ad hoc-methode. De volgende stelling stelt ons echter in staat de berekening van het torenpolynoom van een bord terug te brengen tot het berekenen van polynomen van eenvoudiger borden. Door herhaalde toepassing van de stelling kunnen we, met enig geduld, het polynoom van ieder bord vinden.

Stelling: Zij C een bord. Kies een open veld en laat D het bord zijn dat uit C ontstaat door alle velden in dezelfde rij of kolom als het gekozen veld (inclusief het gekozen veld) van een kruis te voorzien (deze velden worden dus verboden velden). En zij E het bord dat uit C verkregen wordt door het gekozen veld van een kruis te voorzien. Dan geldt:

$$T_C(x) = xT_D(x) + T_E(x)$$

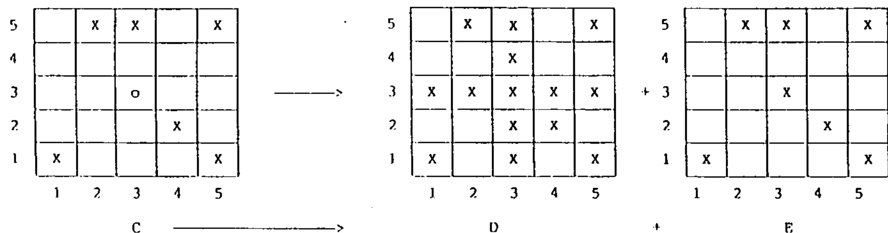
Als we in de stelling voor bord C het bord uit figuur 2a nemen en daarop het open veld (3, 3) kiezen dan zijn de borden D en E zoals in figuur 4 is aangegeven.

Bewijs van de stelling:
Als k torens op het bord C geplaatst worden, wordt het gekozen veld al dan niet bezet. Als het bezet wordt dan moeten nog $k - 1$ torens op het bord D worden geplaatst, en dit kan op $t_{k-1}(D)$ manieren. Maar als het gekozen veld niet bezet wordt dan moeten de k torens op het bord E geplaatst worden, en hiervoor zijn $t_k(E)$ mogelijkheden.

Dus $t_k(C) = t_{k-1}(D) + t_k(E)$

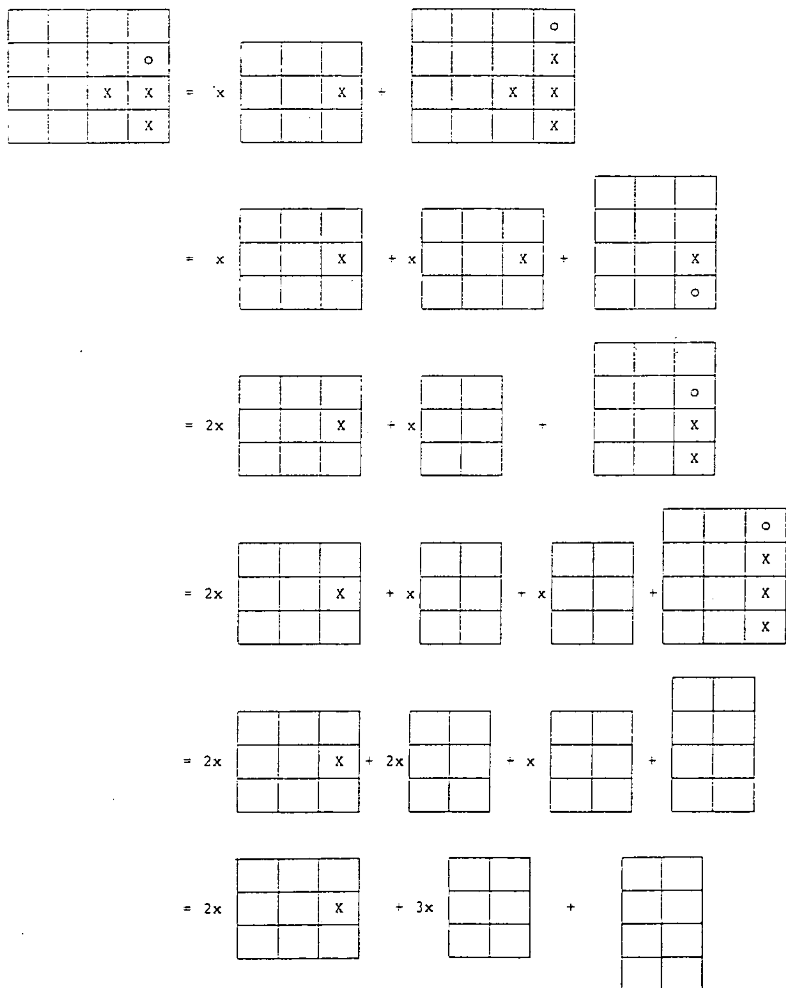
$$\begin{aligned} \text{zo dat } T_C(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} t_k(C)x^k \\ &= \Sigma t_{k-1}(D)x^k + \Sigma t_k(E)x^k \\ &= xT_D(x) + T_E(x) \end{aligned}$$

Met behulp van bovenstaande stelling vinden we in het volgende voorbeeld het torenpolynoom van een 4×4 bord.
Indien op een bord een gehele rij of gehele kolom bestaat uit verboden velden kunnen we een dergelijke rij of kolom weglaten. In het voorbeeld op bladzijde 139 is dit in voorkomende gevallen gedaan. Alhoewel ieder bord teruggebracht kan worden tot borden die uit slechts één open veld bestaan, kunnen we voor kleine borden (bv. 3×3) het polynoom gemakkelijk vinden. In het voorbeeld brengen we het bord C terug tot borden waarvan het polynoom eenvoudig te vinden is.



Figuur 4

Voorbeeld:



$$= 2x(1 + 8x + 14x^2 + 4x^3) + 3x(1 + 6x + 6x^2)$$
$$+ (1 + 8x + 12x^2)$$
$$= 1 + 13x + 46x^2 + 46x^3 + 8x^4$$



Het torenpolynoom van het voorgaande 4×4 bord is dus $T_C(x) = 1 + 13x + 46x^2 + 46x^3 + 8x^4$. Hieruit is nu af te lezen dat het aantal permutaties van 4 elementen met de gegeven verboden posities (3 niet op de 2e en 4 niet op de 1e of 2e plaats) gelijk is aan 8, de coëfficient van x^4 in het polynoom.
Voor het torenpolynoom van figuur 2a vinden we na enige inspanning:

$$T_C(x) = 1 + 19x + 114x^2 + 253x^3 + 184x^4 + 26x^5$$

De coëfficiënt van x^5 is 26, dus het aantal permutaties van 5 elementen met de gegeven verboden posities is 26, waarmee we dan een antwoord hebben gegeven op de in de inleiding gestelde vraag.
Het berekenen van torenpolynomen op de bovenstaande wijze is een tijdrovende bezigheid. Bij vragen over permutaties met verboden posities kunnen we ons vaak wat werk besparen door over te gaan op het bord van de verboden velden, zoals in de volgende paragraaf zal blijken.

3 Het bord van de verboden velden

Zij C een bord. Het bord van de verboden velden $\overline{C}$ is het bord dat we krijgen door op het bord C de verboden en open velden te verwisselen. Het bord $\overline{C}$ heet het complement van C (zie figuur 5).
Het torenpolynoom van het bord $\overline{C}$ is
$T_{\overline{C}}(x) = 1 + 6x + 10x^2 + 5x^3$, zoals eenvoudig is na te gaan. Met behulp van de volgende stelling is nu het aantal permutaties met de zes verboden posities snel uit te rekenen.

Stelling: Het aantal permutaties van n elementen waarbij geen element op een verboden plaats voorkomt is gelijk aan:

$$t_n(C) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)!\, t_k(\overline{C})$$

waarin $t_k(\overline{C})$ de coëfficiënt is van x^k in het torenpolynoom van het bord $\overline{C}$ der verboden velden.

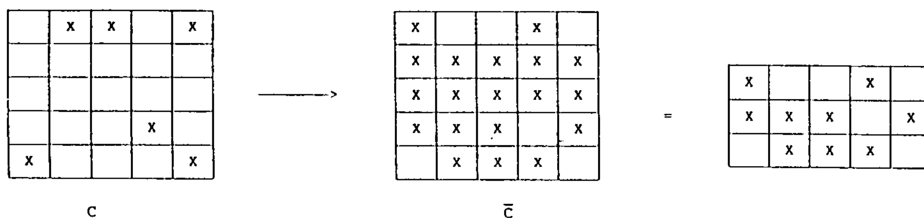
Het aantal permutaties van 5 elementen met de op bord C in figuur 5 aangegeven verboden posities is nu volgens de stelling:

$$5! \cdot t_0(\overline{C}) - 4! \cdot t_1(\overline{C}) + 3! \cdot t_2(\overline{C}) - 2! \cdot t_3(\overline{C}) + 1! \cdot t_4(\overline{C}) - 0! \cdot t_5(\overline{C})$$
$$= 5! \cdot 1 - 4! \cdot 6 + 3! \cdot 10 - 2! \cdot 5 = 26$$

In overeenstemming met het resultaat uit de vorige paragraaf.

We bewijzen de stelling met behulp van het principe van inclusie en exclusie. De lezer zie voor een behandeling van dit principe bv. het artikel 'Tellen en Tellen' van Dr. P. W. H. Lemmens in Euclides 63 (87/88), nr. 7, p. 209-210.
We zeggen dat een permutatie de eigenschap i heeft als het i^e element op een verboden positie staat. Het aantal permutaties met de eigenschap i noemen we $A(i)$. Het aantal permutaties met zowel de eigenschap i als de eigenschap j is $A(i,j)$ enz. Met behulp van het principe van inclusie en exclusie vinden we dat het aantal permutaties waarbij geen element op een verboden positie staat gelijk is aan

$$\begin{aligned} n! &- (A(1) + A(2) + \ldots\ldots + A(n)) \\ &+ (A(1,2) + A(1,3) + \ldots\ldots) \\ &- (A(1,2,3) + A(1,2,4) + \ldots\ldots) \qquad (1) \\ &+ \ldots - \ldots \\ &\pm A(1,2,\ldots,n) \end{aligned}$$



Figuur 5

			x
	x	x	
	x		x
x			
1	2	3	4

C

		T	
	T		
T			
			T
1	2	3	4

2341: permutatie met eigenschap 2

T			
	T		
			T
		T	
1	2	3	4

4312: permutatie met eigenschap 2 en 4

Figuur 6

Voor het bord in figuur 6 is $A(1) = 1 \cdot 3!$, de toren in de eerste kolom kan op één manier op het enige verboden veld worden geplaatst, voor de overige drie torens zijn er dan nog 3! mogelijkheden. $A(2) = 2 \cdot 3!$, de toren in de tweede kolom kan op één van de twee verboden velden geplaatst worden, waarna er voor de drie overgebleven torens weer 3! mogelijkheden zijn.
Net zo $A(3) = 1 \cdot 3!$ en $A(4) = 2 \cdot 3!$
$A(1) + A(2) + A(3) + A(4) =$
$(1 + 2 + 1 + 2) \cdot 3! = t_1(\overline{C}) \cdot 3!$
waarbij $t_1(\overline{C})$ de coëfficiënt is van x in het torenpolynoom van bord $\overline{C}$.
$A(1,2) = 2 \cdot 2!$, want het aantal mogelijkheden om zowel de eerste als de tweede toren op een verboden veld te plaatsen is gelijk aan 2, waarna de andere twee torens nog op 2! manieren geplaatst kunnen worden. $A(1,3) = 2 \cdot 2!$, plaats de torens één en drie op een verboden veld en vervolgens weer de overige torens. Zo vinden we $A(1,4) = 2 \cdot 2!$,
$A(2,3) = 1 \cdot 2!$, $A(2,4) = 2 \cdot 2!$ en $A(3,4) = 2 \cdot 2!$
Opgeteld krijgen we nu:
$A(1,2) + A(1,3) + \ldots + A(3,4) =$
$(2 + 2 + 1 + 2 + 2) \cdot 2! = t_2(\overline{C}) \cdot 2!$
Op dezelfde wijze vinden we ook $A(1,2,3) = 1 \cdot 1!$,
$A(1,2,4) = 3 \cdot 1!$, $A(1,3,4) = 2 \cdot 1!$ en
$A(2,3,4) = 3 \cdot 1!$
En dus,
$A(1,2,3) + A(1,2,4) + A(1,3,4) + A(2,3,4) =$
$9 \cdot 1! = t_3(\overline{C}) \cdot 1!$

Tenslotte is
$A(1,2,3,4) = 1 \cdot 0! = t_4(\overline{C}) \cdot 0!$

Invullen in formule (1) geeft dat het aantal permutaties waarin geen element op een verboden positie staat gelijk is aan
$t_0(\overline{C}) \cdot 4! - t_1(\overline{C}) \cdot 3! + t_2(\overline{C}) \cdot 2! - t_3(\overline{C}) \cdot 1! +$
$t_4(\overline{C}) \cdot 0! =$
$\sum_0^4 (-1)^k (4-k)! \cdot t_k(\overline{C})$
Op een willekeurig $n \times n$ bord C is analoog aan het voorgaande
$A(1) + A(2) + \ldots + \ldots + \ldots + A(n) =$
$(n-1)! \cdot t_1(\overline{C})$
$A(1,2) + A(1,3) + \ldots + \ldots + \ldots =$
$(n-2)! \cdot t_2(\overline{C})$
enz.
Invullen in (1) geeft nu het gevraagde resultaat.

4 Een bekende permutatie met verboden posities

In Euclides 63-7 lost dr. K. A. Post met behulp van het principe van inclusie en exclusie het volgende probleem op: (de Sinterklaasloterij)
Een gezelschap van n personen trekt briefjes om surprises voor elkaar te maken. Het is de bedoeling dat niemand een briefje met zijn eigen naam trekt. Op hoeveel manieren kan dat?

We zoeken hier het aantal permutaties van $1, 2, \ldots, n$ waarbij i niet op de i-de plaats staat. In termen van het torenpolynoom hebben we hier dus het bord C en zijn complement $\overline{C}$ van figuur 7. (In figuur 7 zijn bij bord $\overline{C}$ alle verboden velden weggelaten.)

				x
			x	
		x		
	x			
x				
1	2	....		n

C

$\overline{C}$

Figuur 7

Het torenpolynoom van het bord $\overline{C}$ is $T(x) = (1 + x)^n$

De coëfficiënt van x^k is volgens het binomium van Newton gelijk aan $\binom{n}{k}$ En dus vinden we met de stelling uit de vorige paragraaf dat het aantal permutaties waarbij geen element op een verboden positie staat gelijk is aan

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)! \binom{n}{k}$$
$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

In dit verband merken we nog op dat de kans dat in de Sinterklaasloterij geen van de personen zijn eigen briefje trekt gelijk is aan

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Voor grote n is deze kans dus ongeveer gelijk aan $\frac{1}{e}$ (voor $n = 4$ is deze kans gelijk aan $\frac{3}{8} = 0{,}3750$ terwijl $\frac{1}{e} = 0{,}3679$).

Overigens is dit resultaat niet nieuw. (Zie bijvoorbeeld B. C. Dijkstra-Kluyver in N.T.v.W. 60-4.)

Literatuur

Ian Anderson *A first course in combinatorial mathematics*, Oxford University Press 1974.

C. L. Liu *Introduction to combinatorial mathematics*, McGraw-Hill, New York 1968.

Als een spreker, die zelf verklaart, dat zijn belangstelling voor en verdieping in de desbetreffende didactische materie nog maar enige maanden oud is, het resultaat van zijn onderzoek laat culmineren in een: 'Dat is H.B.S.-mechanica. Schaf die prulwetenschap af!', zonder een constructief idee aan de hand te doen voor wat er na die afschaffing moet gebeuren, en in zijn betoog en passant veler pennevruchten o.a. van iemand van zo grote verdienste als dr. Beth Sr meent te mogen 'kraken', dan zal de spreker zich wel niet kunnen verwonderen over het feit, dat wij ten aanzien van de hechtheid van het hierbij behorend betoog argwanend worden, en ten aanzien van geest en strekking van dat betoog verontrust en verontwaardigd. We waarderen uiteraard, dat van universitaire zijde voor de didactische problemen van het V.H.M.O. belangstelling aan de dag wordt gelegd, maar er zal aan enige voorwaarden moeten worden voldaan, wil het gebodene voor ons onderwijs positieve waarde hebben. Mede op grond van wat pers en syllabus ons leerden, achten we het betoog van prof. Freudenthal (in de 'Tempel' te Rotterdam, op 9-XI-1952) beneden de door ons bedoelde maat. Toch willen we hier ook gaarne verklaren, dat we zijn kennis en belangstelling node zouden missen; zijn beweringen zijn echter, naar het ons toeschijnt vaak te impulsief, de gebezigde woorden te 'dik'.

Fragment uit de openingsrede, gehouden door de voorzitter van Wimecos, drs. G. A. Janssen, op de jaarvergadering van 5 januari 1953 te Amsterdam. (Wimecos was een vereniging van leraren wiskunde, mechanica en cosmografie, de voorloper van de huidige NVvW.)
Uit: Euclides 28, 1952-1953.

▶ Dominostenen uit Québec

M. C. van Hoorn

De beide werkbladen komen deze keer uit het Frans/Canadese tijdschrift *Instantanés Mathématiques*. Deze Franse titel betekent zoveel als *Wiskundige Momentopnamen*.
De werkbladen lijken misschien louter puzzeltjes te bevatten; maar de opgaven passen heel goed in een gevarieerd rekenprogramma.
Wie de dominostenen niet kent, kan de volgende informatie gebruiken (in het tijdschrift zijn alle dominostenen afzonderlijk getekend).
Er zijn 28 verschillende dominostenen, met 0, 1, 2, 3, 4, 5 of 6 stippen op elke helft. In de oplossing mogen niet twee gelijke stenen voorkomen. De steen met 5 en 3 stippen is dezelfde als de steen met 3 en 5 stippen.

Het plaatsen van deze werkbladen moge een eerbetoon zijn aan de organisatoren van de 7e ICME*-conferentie te Québec.
Deelnemen aan zo'n conferentie betekent automatisch ook kennis maken met de stad en de provincie Québec. Opvallend is dat Frans er de voertaal is. Gelukkig voor degenen die geen Frans verstaan spreekt men desgewenst Engels. Het Frans in Canada is wel even iets anders dan het Fries in Nederland. Ik geloof niet, dat in Friesland de lessen wiskunde in het Fries worden gegeven, en ik weet zeker, dat op Schiphol geen aanduidingen in het Fries voorkomen. De provincie Québec is vrijwel geheel Franstalig, en op het vliegveld van Toronto (buiten Québec) zijn de teksten in twee talen aangebracht.

De voertaal op een ICME-conferentie is Engels. Nederlanders hebben daar niet veel problemen mee (denken ze zelf). Zo'n grote conferentie is evenwel niet vrij van taalproblemen. Formules zijn overal dezelfde, maar meestal gaat het niet over formules. Het is bepaald interessant om tijdens een werkgroepbijeenkomst mensen uit Libanon en Portugal met elkaar te horen discussiëren in het Engels – in hùn Engels; ze hadden het liever in hùn Frans gedaan. Op de ICME-conferentie te Québec mocht ik toevallig twee verschillende deelneemsters uit Modena, Italië beluisteren. Beide keren in duidelijk Engels, een verademing. En dit dan in Québec, Frans Canada.
Terug in Nederland ga je extra letten op taalproblemen van leerlingen die niet van huis uit Nederlands spreken, maar een dialect (en/) of een vreemde taal.

Gelukkig wordt er in Nederland de laatste tijd aandacht gevraagd voor zorgvuldig taalgebruik. In de lopende jaargang van Euclides is dat al gedaan door Jan Muthert en Bram Lagerwerf.

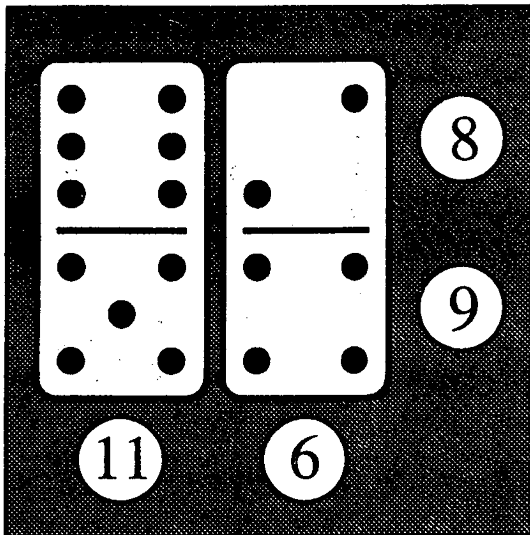
De 8e ICME-conferentie, in 1996, zal plaats vinden te Sevilla, Spanje.

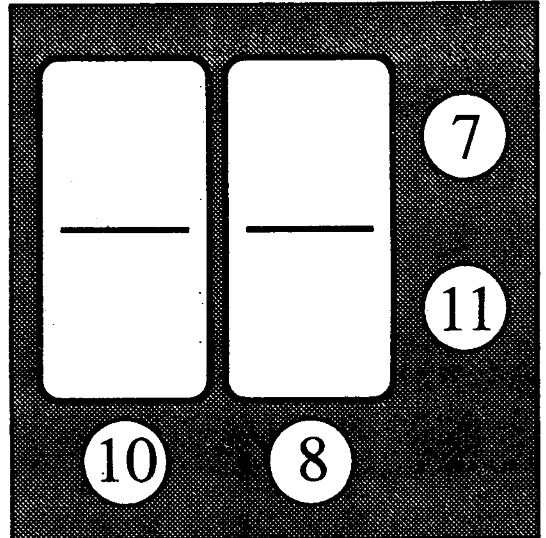
* ICME = International Congress on Mathematics Education.

● Werkblad ●

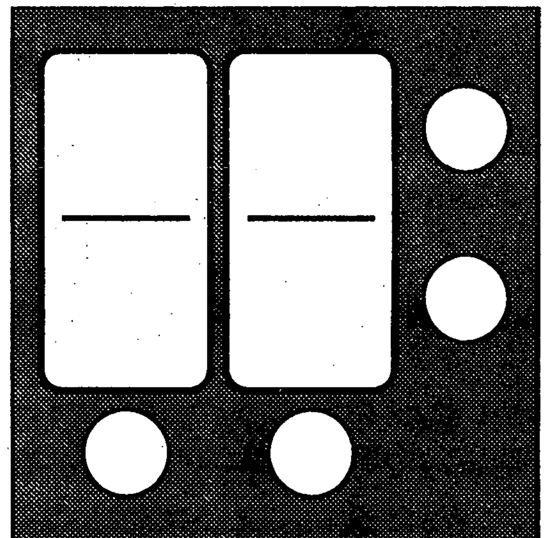
▶ De onbekende dominostenen

Bekijk





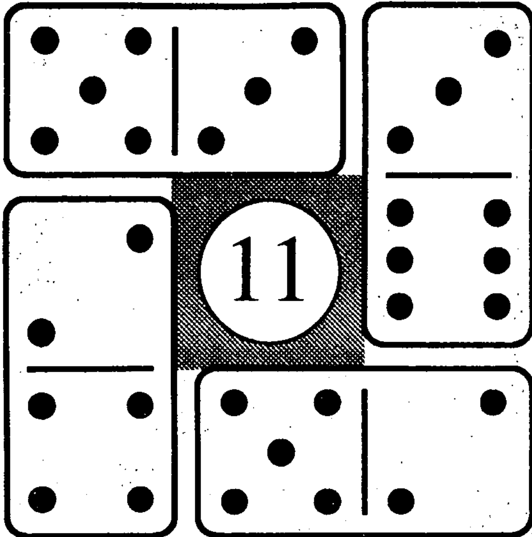
Teken de juiste stippen



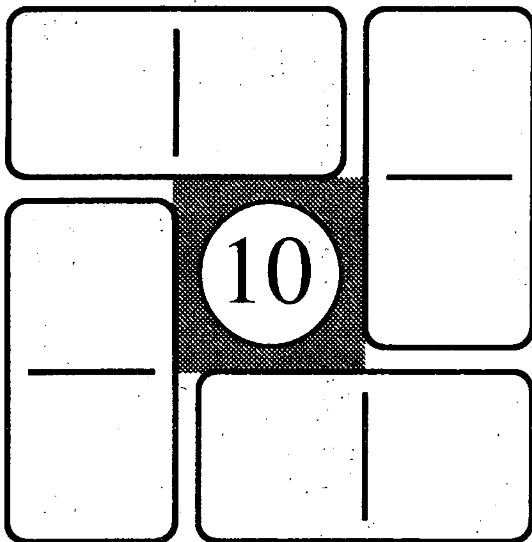
Maak net zo'n opgave

● Werkblad ●

▶ De carrousel

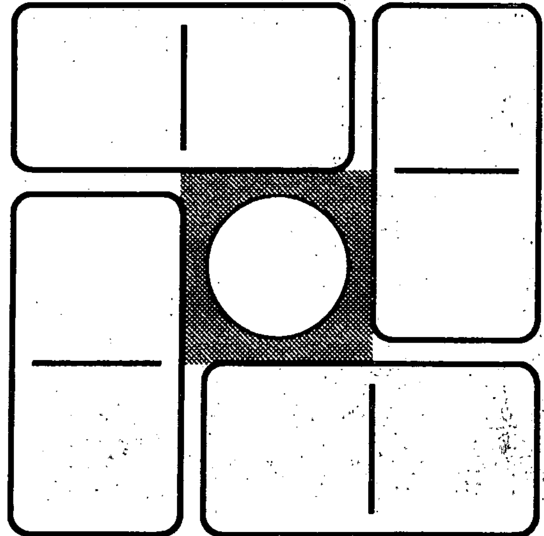


Bekijk



Teken de juiste stippen

Maak net zo'n opgave



▶ Discussie, discussie

Op deze bladzijde en op de hierna volgende bladzijden treft men bijdragen aan aan één discussie. Wat is er aan de hand?
In nummer 2 van de lopende jaargang (het oktobernummer) plaatsten wij een brief van de sectie wiskunde van het Stedelijk Gymnasium Leiden, alsmede een toelichting bij deze brief. Na het slot was een kort nawoord van het bestuur opgenomen. Op deze brief & toelichting & nawoord ontvingen wij reacties. Deze zijn hierna afgedrukt, alsmede – naar goed journalistiek gebruik – replieken en duplieken. Met het afdrukken van dit alles beschouwen wij de onderhavige discussie als gesloten.

Onder **I** vindt men de reactie van de sectie wiskunde van het Stedelijk Gymnasium Leiden op het nawoord van het bestuur. Het bestuur reageert hierop door een (genoemde) brief van 28 september j.l. te publiceren; toegevoegd is een korte inleiding. Deze brief is destijds naar Leiden, en trouwens ook naar andere respondenten gestuurd.
Onder **II** vindt men de reactie van Frans Ballering, Anders Vink en André Zegers op de brief & toelichting van de sectie uit Leiden. Vervolgens repliek en dupliek.
Onder **III** staat de reactie van Jolanda Hoffman-Vreugdenhil op de brief & toelichting, ook weer met repliek.
Tot slot nog dit: de Samenwerkingsgroep Wiskunde 12-16 valt onder de verantwoordelijkheid van het APS.

De redactie

Ia

Reactie op het korte nawoord van het bestuur n.a.v. onze bijdrage in nr. 2.

Sectie wiskunde Stedelijk Gymnasium Leiden

Onze brief aan de voorzitter en het begeleidende verhaal lagen begin juli '92 bij de redactie; plaatsing in Euclides 1 lukte niet omdat het bestuur meer tijd nodig had voor een reactie, zo vernamen wij desgevraagd. In nummer 2 (blz. 47) was het wél zover: vier regels verbijsterende oppervlakkigheid.
Eén der voorlichters deelde in februari mede dat 'deze plannen worden uitgevoerd, óók als de basisvorming alsnog wordt afgeblazen'; de eerste zin klopt dus niet. De tweede bevat niets nieuws, en de derde roept meer vragen op dan zij beantwoordt; wij dachten te kunnen rekenen op een inhoudelijk commentaar, op een verantwoording en een standpunt.
Helaas, het mocht niet zo zijn; daarom een aantal vragen, die wij graag op deze plaats beantwoord zien.
1. Hoe heeft het bestuur inzicht verworven in de mening van het docentenveld? Als Lunetten maatgevend was, dan heeft de daar aanwezige secretaris een erg duidelijk signaal gekregen.
2. Hoe denkt het bestuur dat de aansluiting met wiskunde B in 4 havo en 5 vwo gerealiseerd moet worden, nu er een situatie aan dreigt te komen waarin leerlingen met een (ten opzichte van het huidige beginniveau) enorme achterstand opgezadeld dreigen te worden?
3. Heeft het bestuur enig idee wie er enthousiast zijn voor de plannen? Zijn dat docenten die het allemaal waar moeten gaan maken, of zijn het wellicht theoretici die weinig voeling hebben met de realiteit? Hoe en wanneer heeft het bestuur de achterban geraadpleegd?
4. Heeft het bestuur enig idee waar docenten de vele extra tijd vandaan moeten halen om alleen al de 'toetsen nieuwe stijl' te produceren? De ervaringen van degenen die oprecht proberen om bij wiskunde A proefwerken en schoolonderzoeken te maken zoals die bedoeld waren, zijn op z'n zachtst gezegd schrijnend te noemen. En de beloofde proefwerkbundels komen óók in het leerlingenveld terecht.

5. Blijkbaar zijn er mensen die het belangrijk vinden dat 'ook onze TV-sterren vertellen dat ze vroeger van wiskunde niet veel snapten' (W12-16, een boek voor docenten, blz. 5). Op pagina 9 van hetzelfde werkje stellen de auteurs dat zij ervan overtuigd zijn dat deze leerplanvernieuwing democratisch is verlopen, onder andere omdat op diverse bijeenkomsten naar hun schatting bijna driekwart van de docenten die met het nieuwe programma te maken krijgen geïnformeerd is. Wat voorlichten, informeren en vervolgens vragen afwimpelen, dan wel: niet beantwoorden met democratie te maken heeft is ons ten enen male onduidelijk. Hoe en waar ziet het bestuur het democratische aspect?
6. Men hoeft maar het oor te luisteren te leggen bij oud-leerlingen om te beseffen hoe belangrijk vooral een degelijke wiskunde B-ondergrond is. Deelt het bestuur onze mening dat het zeer onbehoorlijk is om leerlingen naar vervolgopleidingen of de maatschappij in te sturen met het idee dat ze iets van wiskunde afweten en begrijpen, terwijl ze bij de eerste echte confrontatie met het vak keihard onderuit zullen gaan? En wat denkt het bestuur van het wegvallen van wiskunde als ondersteuning bij natuurkunde, scheikunde?
7. Steeds sterker krijgen wij de indruk dat er iets nieuws bedacht is voor lbo/mavo, en dat havo en vwo het zelf maar moeten bekijken. Dat lbo en mavo *hierop* zitten te wachten, is noch in Lunetten, noch in Rotterdam gebleken. Wat denkt het bestuur hierover?
8. Begin oktober (ruim een half jaar na onze brief aan de voorzitter) ontvingen wij een reactie van het bestuur, gedateerd 28 september 1992. Deze reactie stelde ons in het geheel niet gerust. Wil het bestuur alsnog in Euclides reageren op onze bijdrage?

Ib

Inleiding
Omdat de paginaprijs van Euclides relatief hoog is en wij denken dat de leden vooral 'wiskunde voor de klas' willen lezen, houden wij reacties op artikelen in principe kort en zakelijk. Bovendien moet het uitdragen van onze visie daar niet van afhangen. Daarvoor dienen 'Van de bestuurstafel' en bijeenkomsten (jaarvergadering e.a.). In de onderhavige situatie is niet aan de orde of wij, ook docenten voor de klas, dezelfde mening hebben over didactiek als de SGL-sectie. Aan de orde is of de conceptleerplannen:

- adequaat zijn als het gaat om de aansluiting met de bovenbouw havo/vwo;
- aan de nieuwe examenprogramma's vbo/mavo een goede invulling geven;
- zinvol zijn voor die leerlingen die 'de wiskunde' afsluiten met de basisvorming.

De bijbehorende populaties (in aantal: ± 92000, ± 103000, ± 87000) hebben hun eigen rechten. Vandaar dat we blij zijn met de 5 verschillende trajecten waarin naar onze mening aan de drie criteria wordt voldaan. Veel zal afhangen van de wijze waarop elke sectie het onderwijs inricht. Dat schreven wij reeds eerder aan de SGL-sectie. Omdat deze brief antwoorden geeft op de meest relevante vragen besluiten we daarmee onze reactie.

Den Haag, 28 september 1992

Geachte collega's,

In het voorjaar van 1992 volstonden wij met een kort antwoord op uw brief. Nu een reactie die uitvoeriger is. U heeft daar recht op.

De vereniging is de afgelopen jaren zeer actief geweest in het proces van wisselwerking tussen het onderwijsveld en de commissie die in opdracht van het ministerie advies moest uitbrengen in de vorm van een concept-leerplan voor vbo, mavo en de eerste leerjaren havo en vwo.
Structureel daarbij waren:

- de ontmoetingen (uitwisseling van informatie en meningen) in de regionale bijeenkomsten die onder auspiciën van de vereniging plaatsvonden (najaar 1990, najaar 1991)
- de daaruit voortgekomen werkgroepen die de (tussentijdse) ontwerpvoorstellen intensief bestudeerden en hun bevindingen rapporteerden aan het bestuur van de vereniging
- de contacten met de vertegenwoordigers van de vereniging in de COW
- de samenwerking met de VALO (veld advisering leerplan ontwikkeling)

●

■ en niet in het minst de rol van ons blad Euclides, waar in de laatste jaren voor discussie en informatie over de nieuwe ontwikkelingen voortdurend plaats werd ingeruimd (inclusief 'special' en toegevoegde ontwerpvoorstellen).
Daarnaast waren de andere reacties uit het veld (in persoonlijk contact, per telefoon of per brief) voor het bestuur ook zeer belangrijk. Steeds werden de NVvW-vertegenwoordigers in de COW hiervan op de hoogte gebracht. Al met al hebben de meningen uit het veld er voor gezorgd dat het uiteindelijke advies van de COW vergeleken met vroegere versies flink is bijgesteld. Hierover straks meer.
Eerst willen we nog even aandacht vragen voor de volgende twee zaken die naar onze ervaring tot veel misverstanden aanleiding hebben gegeven.

1. Basisvorming
Dwars door de hele discussie loopt de problematiek van de basisvorming. Dit nieuwe model voor de eerste jaren van het volledige voortgezet onderwijs is politiek lang onzeker geweest. Uiteindelijk gaat de basisvorming door en zal voor veel scholen (en docenten) de nodige organisatorische problemen opleveren. Bij alle schooltypes zullen de kerndoelen van de basisvorming in het leerplan moeten worden geïntegreerd en getoetst. Deze kerndoelen zijn zo opgesteld dat ongeveer 80% van alle kinderen geacht wordt deze te kunnen halen. Tevens moet getracht worden om zoveel mogelijk van de resterende 20% van deze groep nog een zo groot mogelijk deel van de kerndoelen te laten halen.
Op zich zijn deze kerndoelen niet door de COW opgesteld, maar door een andere commissie van het ministerie. Wel bepleit de COW om de scholen het nieuwe leerplan te laten invoeren parallel met de basisvorming per 1 augustus 1993 vanaf leerjaar 1. De COW stelt zich op het standpunt dat voorkomen moet worden dat het veld, in korte tijd na elkaar, geconfronteerd wordt met twee inhoudelijk ingrijpende vernieuwingen. Het bestuur van de NVvW is het met dit laatste eens.

2. Leerplan
Sinds er geen rijksscholen meer bestaan kan de overheid alleen examenprogramma's vaststellen. Het vaststellen van leerplannen is een zaak voor het bevoegd gezag (= schoolbestuur). Dit in tegenstelling tot andere landen waarbij elk initiatief van tevoren de goedkeuring behoeft van de overheid. Ons land kent gelukkig ook geen staatsdidactiek.
Dit vormt ook de reden voor de grote verscheidenheid aan wiskundemethodes (en zelfgemaakt materiaal) in Nederland. Vanuit deze achtergrond moeten uitspraken gezien worden van de COW dat veel afhangt van de manier waarop schrijvers de leerplannen in leerlingenmateriaal gaan verwerken. Wel is van belang te memoreren dat de educatieve uitgeverijen vanaf het begin een waarnemer in de COW hebben gehad en dat tijdens het proces van de afgelopen jaren ook steeds nauw contact is geweest tussen de ontwikkelgroep en de auteursteams van de verschillende methoden.

We hebben misschien wat veel van uw geduld gevraagd met de opsomming van bovenstaande zaken maar het vormt een belangrijk kader voor ons handelen in het algemeen en voor onze reactie op uw brief.

Allereerst het belangrijkste:
Uw zorg voor uw leerlingen waar het betreft de aansluiting naar het vervolgonderwijs en de bovenbouw havo/vwo, en in het bijzonder daarbij de angst dat de algebraïsche achtergrond onvoldoende zou worden aangebracht in de onderbouw.
Deze signalen bereikten ons (al in een vroeg stadium) van veel leden en werkgroepen. En er is iets mee gedaan! Mede daardoor geeft het uiteindelijke Trajectenboek niet minder dan 5 trajecten aan:
1. vbo-B 2. vbo/mavo-C 3. vbo/mavo-D
4. havo 5. vwo
Het vergelijken van deze trajecten zal u ogenblikkelijk de uitspraak ontlokken: 'Zo, daar zit nogal wat verschil tussen! Dus toch wel aandacht voor abstractie.' Juist ook ten aanzien van die algebra. Daarmee is niet gezegd dat er vergeleken met vroeger niets is veranderd. Er zijn accenten verlegd. De nadruk ligt op breed toepasbare technieken, dat wil zeggen technieken die bij verschillende typen verbanden te gebruiken zijn, en niet technieken die bij één functietype horen (zoals bijvoorbeeld kwadraat afsplitsen). De algebra is nu meer gericht op bruikbaarheid. Hoe uw uiteindelijke onderwijs in dezen zal veranderen hangt van meerdere zaken af.

Zie voorgaand kader:
■ Hoe integreert u de basisvorming in uw leerplan?
■ Welke opleidingen zijn in uw school aan de orde?
■ Welk materiaal achten de auteurs adequaat?
■ Welke methode kiest u?
■ En niet onbelangrijk, welke visie heeft u (= de sectie) zelf?; met inachtneming van de eigen populatie en de verschillende eisen die WA en WB stellen aan de voorbereiding op de Hawex- en Hewet-programma's.

Verder willen we nog even kort ingaan op een aantal door u genoemde zaken:

a. Uit het voorgaande moge duidelijk zijn dat de invloed van het veld uitermate belangrijk is geweest bij de totstandkoming van het advies. Dit geldt voor zowel de kritiek die de ontwerp-voorstellen hebben gekregen als de waardering die er voor was. In elk geval is het bestuur van de vereniging de mening toegedaan dat 'er goed geluisterd is' en dat de effecten daarvan zichtbaar zijn.

b. De bijeenkomsten van 15-1-1992 en 12-2-1992 te Rotterdam waren buiten bemoeienis van de NVvW georganiseerd als voorlichtingsbijeenkomsten voor de basisvorming. Uitspraken als 'We zullen de leerlingen niet meer lastig vallen met dat formele en abstracte gedoe' kunnen wij niet beoordelen. Deze kunnen in elk geval niet slaan op de doelgroep waar u uw zorg over uitsprak. Mogelijk werd in dat geval gedacht aan leerlingen die een vbo-A programma volgen (een groep waarvoor de kerndoelen van de basisvorming al te hoog zijn). Maar weten doen wij het niet.

c. Niet al het gebruikte voorbeeldmateriaal is steeds even geslaagd geweest voor elk schooltype. Het door u genoemde voorbeeld (Bettine) is, zoals K. Hoogland in Euclides jrg. 67,9 heeft laten zien, eenvoudig te veranderen in een opgave met meer wiskundige diepgang.

Wij hebben veel waardering voor uw bezorgdheid voor uw leerlingen en het wiskunde-onderwijs in het algemeen. Daarom danken wij u hartelijk voor uw brief.

Tot slot willen wij opmerken dat wij niet verwachten dat u nu volledig gerustgesteld zult zijn. Wij zijn dat zelf ook niet! Er staat wiskundig Nederland na de Hewet en de Hawex een laatste (?) grote vernieuwingsoperatie in het voortgezet onderwijs te wachten. En of dat allemaal meteen goed zal gaan?

Wellicht dat onze mening het best geïllustreerd wordt door hetgeen we in een begeleidende brief aan studenten/toekomstige collega's schreven bij het aanbieden van de Euclides-'special' (jrg. 67,9):

Het doet ons genoegen u de 'special' van Euclides over de voorstellen van de COW aan te bieden. Een prima bewijs van:
■ het feit dat niet iedereen overal gelukkig mee is
■ de waardering die menigeen heeft voor de voorstellen
■ het vermoeden dat het nog een hele klus wordt
■ de overtuiging dat we nog veel met elkaar moeten praten
■ het algemeen heersende gevoel dat we ondanks enkele meningsverschillen de goede kant uitgaan
■ het vertrouwen dat het ons zal lukken.

Met vriendelijke groeten,
Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

IIa

Reactie

Anders Vink, André Zegers en Frans Ballering
(mede-voorlichters van de Hogeschool Rotterdam)

In Euclides nr. 2 van oktober 1992 levert de sectie wiskunde van het Stedelijk Gymnasium Leiden een bijdrage aan de discussie rond het nieuwe onderbouwprogramma. Deze reactie daarop wil vooral een aantal onjuistheden daarin rechtzetten.

We hebben bij verschillende gelegenheden gemerkt dat met name wiskundeleraren van de bovenbouw vwo zich zorgen maken om hun toekomstige leerlingen. Gelukkig, misschien terecht, maar in deze bijdrage niet met de juiste argumenten. Er blijkt steeds weer dat velen nauwelijks een idee hebben

van wat hen te wachten staat. Daarom heeft de (grootschalige) voorlichting zich gericht op een eerste oriëntatie. Met behulp van vele voorbeelden, waarvan steeds werd gevraagd: 'Wat is er zo anders aan dan in de huidige praktijk' is geprobeerd iedereen daarvan een idee te geven. Dat daarmee geen grote lijnen zichtbaar worden is evident en onvermijdelijk. De grote lijnen van een programma zien is pas mogelijk na grondige bestudering van compleet leerlingmateriaal en dat is nu eenmaal niet voorhanden. En wat wel voorhanden is, het Trajectenboek, is niet bepaald geschikt om voor de grote groep mee te beginnen. Wij denken dus dat de sectie met verwachtingen naar de voorlichtingsdagen kwam, die wij niet konden waarmaken. Dat is zeker geen verwijt aan hen, integendeel. Zij hebben zich duidelijk op die bijeenkomsten voorbereid.

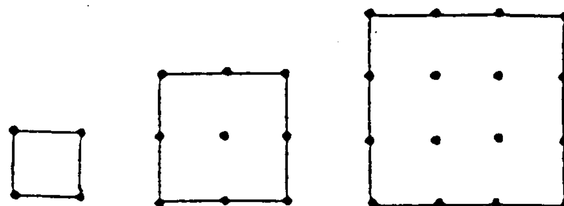
Des te verbazender is het voor ons dat zij een aantal zaken niet, of volkomen verkeerd hebben opgepikt. Bijvoorbeeld reacties van leraren uit lbo en mavo, waaronder er niet weinig zijn die blij zijn dat er iets verandert, zodat zij verlost worden van veel, voor hun leerlingen zinloos gemanipuleer met symbolen. Leraren uit havo en vwo moeten beseffen dat we dan praten over het grootste deel van de leerlingen die naar het voortgezet onderwijs gaan. Maar dat zegt nog niks over de kwaliteit van de nieuwe voorstellen.
Tijdens de voorlichtingsdagen zijn ook opgaven aan de orde geweest waarbij van de leerlingen wordt verwacht dat zij een verband in formulevorm weergeven. In twee gevallen ging het daarbij om figuren die uit puntjes zijn opgebouwd en om vouwen en knippen van papier (zie voorbeeldopgave). Abstraheren smerig? Alles geforceerd vanuit de belevingswereld? Een pertinente onjuistheid, geen moment hebben de voorlichters die indruk willen wekken. Wij denken meer aan: van concreet naar abstract. En als wij de experimentele eindexamens mavo bekijken lijkt er geen sprake van het laten zakken van eisen zodat iedereen het wel kan halen. Integendeel, op zeer veel momenten wordt er van de leerlingen inzicht geëist én getoetst doordat bijna altijd een oplossing moet worden toegelicht. Juist dat mag ook vwo-leraren enig vertrouwen geven in tijden van zorg. Immers leerlingen met inzicht, die ook geleerd hebben om dat te verwoorden, zullen in klas drie en vier zonder problemen en sneller dan nu de vaardigheden aanleren, die zij nodig hebben om vwo-eindexamen te kunnen doen.

Het moet ons van het hart dat kreten als vaag, soft en onverantwoord niet worden onderbouwd en dat de vergelijking met het talenpracticum er een is van het type knollen en citroenen.

Voorbeeldopgave uit: 'Examenbundel 1991'

Opdracht: Geef aan welke rol, c.q. rollen, de formules in deze opgave spelen.

Deze vragen gaan over vierkanten die volgens een vast patroon op ruitjespapier worden getekend. Hieronder staan drie voorbeelden:



Bij elk vierkant wordt geteld hoeveel roosterpunten er op de rand liggen. Er ontstaat zo de volgende tabel:

rangnummer	aantal randpunten	aantal inwendige punten
1	4	0
2	8	1
3	12	4

⑨ Op de bijlage staat de tabel nog eens afgedrukt.
Vul de tabel aan met de aantallen die horen bij de rangnummers 4 en 5.

10. Is er een vierkant met 1991 inwendige punten?

11. Is er een vierkant met 1992 randpunten?

⑫ Maak een formule waarmee je voor elk rangnummer het aantal randpunten kunt bepalen.

⑬ Stel ook zo'n formule op voor het aantal inwendige punten.

14. Is er een vierkant met evenveel randpunten als inwendige punten?

15. Waarvan komen er op den duur het meest: inwendige punten of randpunten?

IIb

Reactie op het stukje van de heren Vink, Zegers en Ballering.

Sectie wiskunde Stedelijk Gymnasium Leiden

De voorlichters Vink, Zegers en Ballering willen een aantal onjuistheden uit het door ons in Euclides 2 gestelde rechtzetten. Vervolgens leggen zij erg goed uit waarom veel docenten, die de voorlichtingsdagen van begin ’92 serieus genomen hebben, zich het bos ingestuurd voelen.
En dan gebeurt het: zij vinden het een pertinente onjuistheid dat vele toehoorders een bepaalde indruk hebben gekregen, terwijl zij die geen moment hebben willen wekken. Blijkbaar beseffen zij nog steeds niet dat hun (ontwijkende) antwoorden die indruk toen zeer nadrukkelijk hebben doen postvatten. Overigens blijkt onzes inziens steeds duidelijker dat zij voor de onmogelijke taak stonden dergelijke omstreden plannen te moeten introduceren bij een groep docenten die vooraf had nagedacht, en reageerde op de ontvangen voorlichting.
Twee andere ideeën in deze alinea vallen op. Om te beginnen refereren zij aan reacties van leraren lbo/mavo, die in groten getale blij zouden zijn met de nieuwe plannen, waarbij zij van leraren havo/vwo vragen om voor die collega’s begrip te hebben. Noch in Lunetten, noch in Rotterdam waren blijde en opgeluchte reacties te horen, maar wel heel veel kritische; overigens was niemand (en dat geldt dus ook voor ons) alléén maar overal tegen. Ten tweede ‘zullen leerlingen met inzicht, die hebben geleerd dat te verwoorden, sneller dan nu de vaardigheden aanleren die zij nodig hebben om vwo-examen te doen’, stellen zij aan het eind. Een simpele stelling, zonder bewijs, waaruit blijkt dat velen geen idee hebben van wat er in een les gebeurt; treurig is het dat daarbij óók degenen horen die, met een volstrekt karikaturaal beeld van het huidige programma en hoe dat onderwezen wordt, de problemen wel even zullen oplossen.
Tenslotte: wij vinden het jammer dat de kreten ‘vaag’, ‘soft’ en ‘onverantwoord’ als niet onderbouwd beschouwd worden; gelukkig zorgen de voorlichters zelf voor een uitstekende extra illustratie daarvan. Appels moeten niet met peren worden vergeleken, maar wij vinden dat van het verleden geleerd moet worden.

IIc

Reactie 2

André Zegers, Frans Ballering en Anders Vink

Niet vaag zijn de volgende harde cijfers die komen uit de evaluatie van de twee voorlichtingsdagen in Rotterdam begin 1992:

Evaluatie Eerste voorlichtingsdag, 15 januari 1992

De bedoeling van deze eerste voorlichtingsdag is u informatie te geven over de veranderingen in het wiskunde-onderwijs voor 12- tot 16-jarige leerlingen inzake de basisvorming en het nieuwe leerplan. Tevens hebben wij met u het komende werk in de wiskundesectie voorbereid en een klein experiment in de les besproken.
Met deze evaluatie willen wij een indruk krijgen in hoeverre onze opzet geslaagd is. Zonodig komen wij op de tweede voorlichtingsdag terug op deze evaluatie.

Totaal indruk	**Inhoud bijeenkomst**	pos.	neu.	neg.
○ positief	Bedoeling gehaald	○	○	○
○ neutraal	**Overdracht**			
○ negatief	Presentatie	○	○	○
	Werkmateriaal	○	○	○
	Tempo	○	○	○
	Werksfeer	○	○	○
	Werk in sectie			
	Uitvoerbaar	○	○	○
	Exp. in les			
	Uitvoerbaar	○	○	○

Andere opmerkingen/suggesties: ....

Resultaat evaluatie voorlichtingsdag Basisvorming & Wiskunde 15.01.1992 (ROTTERDAM)
85 mensen ingeschreven, 80 mensen aanwezig, 74 mensen hebben de enquête ingevuld.

	positief	neutraal	negatief
Totale indruk	43	30	1
Bedoeling gehaald	35	34	5
Presentatie	48	23	3
Werkmateriaal	37	37	0
Tempo	29	33	12
Werksfeer	62	12	0
Werk in sectie	43	27	4
Werk in klas	60	12	2

Een aantal opmerkingen, die we op de evaluatieformulieren tegenkwamen, of in de wandelgangen hebben vernomen:
- Ongeveer 15 mensen waren al naar de voorlichtingsdagen van de Vereniging geweest. Zij hadden over het algemeen het idee dat ze nauwelijks iets nieuws aantroffen.

● De introductietoespraak werd door een aantal mensen slaapverwekkend gevonden. Ook: 'Binnen het tijdsbestek van ± 6 uur kan naar mijn mening meer gebeuren; veel tijd gaat verloren aan lange pauzes.'
● 'Toetsen bepalen in het onderwijs heel vaak het niveau en de inhoud van de leerstof. Zijn er al voorbeeldtoetsen die de basisvorm voor wiskunde afsluiten? Zo nee, wanneer kunnen we die dan verwachten?' Een variant: 'De grote vraag is nog niet beantwoord: laat eens een voorbeeldeindtoets zien!'
● Veel mensen vragen zich af hoeveel lesuren nodig zijn om de sprong van eindniveau basisvorming naar examenniveau nog te kunnen maken.
● 'Tegenzin bij docenten lijkt evident aanwezig; een nogal ongezonde situatie.'
'Gaarne een gemiddelde waardering aftasten bij de aanwezigen, waarop toekomstige ontwikkelingen kunnen worden geënt.'

Resultaat evaluatie 2e voorlichtingsdag 12-02-1992

	positief	neutraal	negatief
Totaal	53	17	1
Bedoeling gehaald	48	22	1
Presentatie	63	7	1
Werkmateriaal	52	16	3
Tempo	34	34	3
Werksfeer	65	6	0
Sectiewerk	28	38	5
Exp. in les	34	32	5

Een aantal opmerkingen in de sfeer van:
– op de tweede dag was minder overlapping met wat ik al wist.
– op de tweede dag werd veel (na het werk in de klas/sectie) duidelijk.

Zouden er echt veel docenten zijn die zich het bos ingestuurd voelen?

De logica achter de gevolgtrekking op grond van de 'stelling zonder bewijs' ontgaat ons. 'Dat velen geen idee hebben wat er in een les gebeurt' kan in ieder geval niet op de voorlichters slaan.

Tenslotte (en daar was deze discussie toch om begonnen?): aan de zorg die zowel door de sectie van het Stedelijk Gymnasium als door ons wordt uitgesproken is voor een deel tegemoet gekomen. Nadere bestudering van het meest recente Trajectenboek leert dat de havo/vwo-trajecten voor algebra, en vooral voor meetkunde zijn bijgesteld. Toch iets geleerd van het verleden?

IIIa

Jolanda Hoffman-Vreugdenhil

Na het lezen van de 'Brief aan de voorzitter', van de sectie wiskunde van het Stedelijk Gymnasium Leiden, gepubliceerd in Euclides nr. 2, kan ik het niet nalaten spontaan de pen op te pakken.

Wie ben ik?
Zelf ben ik werkzaam op de Scholengemeenschap Lelystad, met afdelingen van lbo t/m vwo, één van de proefscholen die per augustus 1990 zijn begonnen met de vervroegde invoering van het nieuwe leerplan, zoals voorgesteld door de COW. Naast mijn lesgeven op school heb ik meegewerkt aan de regionale bijeenkomsten van de NVvW in de herfst van 1990 en 1991. Ook ben ik één van de voorlichters geweest bij de 'Voorlichtingsdagen Basisvorming Wiskunde', georganiseerd door de Samenwerkingsgroep. Vanuit mijn ervaringen met het nieuwe programma, en de geluiden gehoord hebbende van deelnemers aan de regionale bijeenkomsten en voorlichtingsdagen, ben ik naar mijn mening gerechtigd deze uitgebreide reactie te leveren op bovengenoemde publikatie.

Inbreng en vervolg
Over de inbrengmogelijkheden van het onderwijsveld op de gemaakte leerplannen, mag, denk ik, niet worden geklaagd. Er is mij geen verandering in het onderwijs bekend met zoveel inspraakmogelijkheden als de komende. Juist de regionale bijeenkomsten, na vele publikaties over de nieuwe leerplannen, waren bedoeld om meningen en kritieken vanuit het veld te weten te komen. Ook uw brief zal, denk ik, mede invloed hebben gehad op de uiteindelijke versie van het Trajectenboek.
Werkgroepen zijn geformeerd vanuit de regionale bijeenkomsten om kritiek te verwoorden, met als gevolg dat juist de algebra-onderdelen terecht drastisch zijn gewijzigd. Wel is bewust gekozen voor een accentverschuiving naar meer inzichtelijk werken met grafieken, ten koste van algebraïsch manipuleren. Maar zeker voor de havo- en vwo-klassen 1 t/m 3 is het niet zo dat de algebraïsche vaardigheden wegvallen, en abstraheren is géén vies woord, maar de mate waarin dit gebeurt, is afhankelijk van wat bepaalde leerlingen aan kunnen.

Niveau en inhoud

Het is natuurlijk niet zo dat wiskunde nu eindelijk voor iedereen even begrijpelijk wordt. Met de COW-plannen is wel voor het eerst geprobeerd om elke leerling op zijn/haar eigen niveau zinvolle en begrijpelijke wiskunde aan te bieden, aansluitend bij wat kinderen nu aan kunnen en straks nodig hebben. Niet alle onderwerpen zijn gegrepen uit het dagelijks leven, wel veel meer dan vroeger.

Niet alle leerlingen vinden alle onderwerpen interessant, maar door de grote verscheidenheid vinden wel meer leerlingen dan voorheen de wiskunde leuk en zinvol.

Met alle verschillende trajecten is er nooit sprake van geweest om eisen zover te laten zakken dat iedereen alles aan kan. De kerndoelen wiskunde basisvorming zijn voor sommige leerlingen einddoel; voor anderen gaat gelden dat in de loop van het leerproces de kerndoelen al na 2 of 3 jaar zijn bereikt, maar dat daarnaast nog extra kennis van de wiskunde is opgedaan, die nodig is voor de aansluiting naar bijvoorbeeld de bovenbouw havo B of vwo.

Zorgpunten: 4 havo B/vwo

De aansluiting 3e klas – 4 havo B/vwo is een onderwerp waarover veel zorg is uitgesproken. De te verwachten problemen zijn ondanks de bijgestelde leerwegen 3 havo en 3 vwo in het Trajectenboek (nog) niet geheel verholpen, maar mede vanwege de uitgesproken zorgen vanuit het veld zijn dit schooljaar 3 proefscholen, waaronder de mijne, begeleid vanuit het APS, aan het uitzoeken wat bij of na het uitvoeren van de 3 havo- en 3 vwo-trajecten voor verschuivingen nodig zijn tussen de leerstof 3e klas en 4 havo B/vwo. De uitgeverijen zijn hier ook nu weer nauw bij betrokken en krijgen waarschijnlijk tijdig genoeg informatie over deze ervaringen voor de te ontwikkelen 3e klas-boeken en de bij te stellen boeken voor de 4e klassen havo en vwo.

De zwakke leerling

De hoeveelheid contexten in het nieuwe programma wordt gesignaleerd als extra probleem voor de zwakke leerling. Ik denk ook dat voor de leerlingen die moeite hebben met taal, de nieuwe wiskunde niet gemakkelijker zal worden. Toch pleit ik ervoor om deze leerlingen ook bij wiskunde, net als bij alle andere talige vakken, te laten wennen aan en te leren omgaan met meer taal. Wiskunde is een denkwijze; laat dat dan een nog zinvollere denkwijze worden: na de schoolloopbaan heeft een leerling meer aan die denkwijze met begrip voor teksten dan zonder.

In het nieuwe programma mag en kan het rekenen met technische hulpmiddelen vergemakkelijkt worden, want ook rekenen is voor zwakkere leerlingen vaak een groot probleem. Ik werk op school met het lesmateriaal 'de zakrekenmachine', om op een zinvolle manier de rekenmachine te laten gebruiken: niet alleen als rekenhulpmiddel, maar ook om inzicht in bewerkingen te verschaffen. Bijna alle kinderen kunnen zo, op eigen niveau, goed thuis raken op hun eigen machine, en leren deze verantwoord te gebruiken, samen met het – zeer belangrijke – schattend rekenen.

Is het trouwens niet zo dat, in tegenstelling tot wat u schrijft, juist eerst begrip moet ontstaan en daarna vaardigheden ingeoefend moeten worden?

Vanuit de ervaringen van de proefscholen (met extra taakuren voor het ontwikkelen van een goed en zinvol (A)/B-programma, ook weer begeleid door het APS), moet nog duidelijk worden of de mening van het team W12-16 klopt, dat het B-traject een minimaal niveau heeft waarin de kerndoelen van de basisvorming bereikt kunnen worden. Dus ook hier heeft de uitgesproken zorg vanuit het veld weer gevolgen.

Wat nu te doen?

Het nieuwe programma komt. Onze taak als wiskundeleraar is tweeledig: ten eerste zijn we verplicht al onze leerlingen zo goed mogelijk voor te bereiden op de eindtoets wiskunde basisvorming, maar ten tweede willen we dat elke leerling een schooldiploma haalt op het hoogst mogelijke niveau, zonder dat wiskunde hierbij een struikelblok vormt.

Over het geheel genomen zijn de leerplannen positief ontvangen; vooral positief voor de leerlingen. Wel leeft nu sterk de vraag: hoe moet ik als docent te werk gaan? Kan ik dat wel? Deze vragen kan ik me voorstellen en de zorg om het eigen functioneren is begrijpelijk. Ik hoop dat het merendeel van de wiskundedocenten de komende veranderingen aangrijpt om te werken aan en te praten over hun

rol, over wat zij – rekening houdend met hun eigen capaciteiten – willen bereiken bij de leerlingen en hoe. Of iemand wel of niet of soms leerlingen wil laten samenwerken, hen wel of niet wil laten knippen en plakken in de les enz., zijn keuzes die de docent zelf, al of niet in overleg met de eigen sectie, moet maken. Nu is het tijd om daar energie in te stoppen, en niet meer in het afkraken van de nieuwe leerplannen.

Nawoord
De veranderingen vragen inderdaad een investering van elke wiskundedocent. Wellicht moet het vergeleken worden met opnieuw beginnen op een andere school: dat vraagt om net zulke investeringen. Ik vind het waardevol om te investeren in een andere manier van lesgeven, zodat de leerlingen meer tot zelfwerkzaamheid komen en er een positievere werksfeer ontstaat.
Ook ik vind het plezierig om een pakket niet meer voor de eerste keer te geven, maar voor de tweede of derde keer. Door te doen leer ik steeds meer op welke manier de lesstof het beste overkomt. Zulk soort ervaringen van alle proefschooldocenten worden gebruikt voor de nascholingen.
De uitgeverijen hebben te kennen gegeven goed uit de voeten te kunnen met het Trajectenboek en volgen de laatste ontwikkelingen op de voet. Het was dus geen kwestie van verantwoordelijkheid afschuiven maar van een nauwe samenwerking tussen het team W12-16 en de uitgevers, die tot hopelijk zeer verschillende methodes zal leiden, zodat er voor elke docent/vakgroep wat wils is. Ik raad dus ieder aan: ga naar de methodekeuze-conferenties; daar kan elke nieuwe methode worden 'bestudeerd', voor het maken van een verantwoorde keuze.

Lesgeven wordt geen paradijs en zal arbeidsintensief blijven, maar kan misschien wel meer voldoening gaan geven. Gebruik de komende basisvorming wiskunde voor positieve veranderingen. Wie weet krijgt ieder dan net zoveel of nog meer plezier in zijn werk als ik nu ervaar met de nieuwe leerstof op mijn proefschool.

IIIb

Reactie op het schrijven van Jolanda Hoffman-Vreugdenhil

Sectie wiskunde Stedelijk Gymnasium Leiden

In haar reactie op onze bijdrage aan Euclides 2 gaat voorlichtster Jolanda Hoffman-Vreugdenhil in op een aantal door ons aan de orde gestelde zaken. Helaas blijft er nog veel hangen; wij nodigen haar dan ook uit om in dit blad antwoord te geven op een aantal bij ons levende vragen.
1. De voorlichtingsdagen hadden een informatief karakter (zie bladzijde 9 van 'W12-16, een boek voor docenten'), zo was ook onze indruk. In alle plaatsen was een meerderheid tegen *deze* plannen, terwijl op geen enkel moment de vraag aan de orde is geweest òf deze plannen wel moeten worden uitgevoerd, dan wel in deze vorm. Hoe valt dit te rijmen met de door u genoemde 'zovele inspraakmogelijkheden'?
2. Hoe ver kun je gaan met taligheid zonder dat dat ontaardt in zinsontleding/tekstanalyse, zoals bij wiskunde A is gebeurd? Moeten leerlingen die goed zijn in wiskunde maar minder taalvaardig, daar óók bij wiskunde nog eens op worden gewezen?
3. Waarop baseert u uw bewering dat wij van mening zijn dat begrip pas na het aanleren van vaardigheden komt?
4. 'Elke leerling moet een diploma halen op het hoogst mogelijke niveau zonder dat wiskunde een struikelblok vormt'. In deze zin stelt u impliciet dat het niveau dus een eind omlaag moet. Vindt u dit aanvaardbaar?
5. 'Kan ik dit wel' herkent u als een bij veel docenten levende vraag. Blijkbaar heeft geen enkele voorlichter de evenzeer levende vragen 'Wil ik dit wel' en 'Vind ik dit wel verantwoord' opgepikt. Hoe komt het toch dat voorlichters zo vreselijk selectief luisteren?
6. Geen enkele docent is naar welke voorlichtingsbijeenkomst dan ook gekomen met het voornemen om de nieuwe plannen eens even te gaan kraken. Helaas bevatten de ontvangen voorlichting en de verschenen publikaties zóveel controversieels en zaten er zóveel zwakke plekken in dat wij ons gedwongen voelden om aan de bel te trekken.

Vindt u het verantwoord om van wal te steken in een schip waarvan nog niet eens bekend is hoe het dek eruit gaat zien?
7. U vindt het 'waardevol om te investeren in een andere manier van lesgeven, zodat de leerlingen meer tot zelfwerkzaamheid komen en er een positievere werksfeer ontstaat'. Hiermee suggereert u dat het thans louter kommer en kwel is, en dat er een drastische verandering in de leerstof moet komen wil er aan deze wantoestanden een einde komen. Kunt u en wilt u deze suggestie toelichten en verantwoorden?
8. 'Lesgeven kan misschien meer voldoening gaan geven'. Heeft u er wel eens bij stilgestaan dat lesgeven ook wel eens iedere voldoening kan verliezen als *deze* plannen doorgaan?
9. De invoering van de mammoetwet leidde tot een heel ander programma, maar *niet* tot een lager niveau; sterker, de aansluiting met wo en hbo werd veel beter. Het lijkt er thans heel sterk op dat het hoger onderwijs niet is geraadpleegd, of dat het, net als wij, niet alert genoeg is geweest (met uitzondering van H. J. Smid en enkele anderen). Is er eigenlijk wel nagedacht over de enorme kloof die er nu weer aan dreigt te komen?
10. De COW heeft haar opdracht met verve uitgevoerd, maar wel met enorme oogkleppen op; de voor iedereen te voorziene aansluitingsproblemen met mbo, havo, vwo enz. zijn genegeerd. De COW heeft (onbewust?) niet stilgestaan bij de olievlekwerking van haar voorstellen naar andere sectoren van onderwijsland. Te lang hebben wij, in goed vertrouwen, gewacht op actie van het bestuur van de NVvW; of is de coup, die bij Euclides mislukte, alsnog geslaagd?*)

*) **Noot** van de redactie:
als gebruikelijk zijn wij niet verantwoordelijk voor uitspraken in ingezonden bijdragen.

Mededeling

Wiskunde A voor het vwo

In de gele vellen van Uitleg, het voorlichtingsblad van het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen, kwam op 4 november 1992, in nummer 25, als CEVO-mededeling het volgende bericht voor.

De CEVO heeft besloten het advies van de WIEWA inzake de onderdelen Toegepaste analyse, Toegepaste algebra, Automatische gegevensverwerking en het keuze-onderwerp Statistiek over te nemen. Met ingang van 1993 zullen de opgaven in overeenstemming met dit advies worden vastgesteld. Het examenprogramma blijft hiermee ongewijzigd.

WIEWA = Werkgroep Interpretatie Eindexamenprogramma Wiskunde A (vwo); deze werkgroep was ingesteld door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Met het overnemen van het advies van de WIEWA honoreerde de CEVO dus een stukje particulier initiatief van de NVvW.
Eerder al, in Uitleg-Regelingen 23 van 2 oktober 1991, honoreerde de CEVO het eerst door de WIEWA uitgebrachte advies inzake het onderdeel Statistiek en waarschijnlijkheidsrekening. Vastgesteld mag worden dat de WIEWA belangrijk werk heeft gedaan. Een pluim voor de WIEWA, en speciaal voor haar voorzitter Jan Breeman, is dan ook zeker op zijn plaats.
In het genoemde nummer van Uitleg-Regelingen (nummer 25 van 4 november 1992) staan de relevante delen van het WIEWA-advies gepubliceerd. Belangstellenden verwijzen we gaarne naar deze aflevering van Uitleg-Regelingen.
Ook is het WIEWA-advies uitgereikt op de jaarvergadering van de NVvW op 7 november 1992. Het is desgewenst verkrijgbaar (tegen portokosten) bij J. Breeman, De Genestetlaan 94, 2741 AG Waddinxveen.

Verschenen

David S. Watkins; *Fundamentals of Matrix Computations*; John Wiley & Sons; 449 blz.; ISBN 0-471-54601-1

Dit boek geeft een uitgebreide inleiding in de numerieke lineaire algebra. De lezer wordt geacht enige kennis te bezitten van matrix-algebra, inclusief inversen en determinanten.
Overzicht van de hoofdstukken: Gauss eleminatie; Sensitiviteit van lineaire systemen; Orthogonale matrices; Eigenwaarden en eigenvectoren; Singuliere waarde decompositie.
De tekst is doorspekt met opdrachten ter oefening.

Boekbespreking

Kees van Breukelen, Gerard Doevendans, Bram Lagerwerf:
Zorgverbreding wiskunde

De titel van het boek geeft niet direct duidelijk weer waarover het hier gaat. Welke zorg moet er verbreed worden? Heeft het wiskundeonderwijs in Nederland de afgelopen jaren nog niet voldoende in de belangstelling gestaan? Was vijf jaar ontwikkelwerk door de COW voor alle 12- tot 16-jarigen nog niet genoeg? Ook de ondertitel 'Meer kansen voor de zwakke leerlingen' zegt in dat opzicht niet voldoende. In vrijwel elke groep wiskundeleerlingen zit wel een aantal zwakpresteerders. Leerlingen voor wie het een opluchting is wanneer ze wiskunde uit hun vakkenpakket mogen 'laten vallen'.

Er is echter inderdaad een vrij grote groep leerlingen die de nodige extra zorg verdient gezien alle veranderingen de komende jaren en dat is de zwakst presterende groep binnen het ivbo/vbo A/B. Voor de A/B-niveaus van het vbo bestaat geen centraal examen, scholen zijn vrij in het samenstellen van hun afsluitende toetsen. Veel scholen gebruiken de afsluitende schoolonderzoeken van 'Apeldoorn' of 'Zuid-West-Nederland' maar verplicht zijn deze niet, elke school heeft in principe z'n eigen programma. Op sommige scholen wordt aan de ivbo-leerlingen uitsluitend twee jaar rekenonderwijs gegeven. Hoe moet dat straks met de basisvorming? Kunnen deze leerlingen voldoen aan de kerndoelen? En hoe zorg je voor vier jaar lang zinvol wiskundeonderwijs als ze er zo lang over zullen doen? Voldoende reden dus voor extra zorg voor deze toch tamelijk grote groep leerlingen.

Het boekje vormt de weerslag van een cursus die door het APS in 1990/'91 gegeven werd om docenten voor te bereiden op toekomstige ontwikkelingen. Er is gekozen voor een aantal thema's die onderling weinig verband met elkaar hebben:
- de eigen oplosmethoden van de leerlingen
- rekendidactiek
- het onderwijsleergesprek
- de zakrekenmachine
- schatten
- leerproblemen en onderwijsmogelijkheden

Er worden veel voorbeelden gegeven, vaak met leerlingenuitwerkingen erbij. Het is duidelijk: hier spreken docenten vanuit hun eigen onderwijspraktijk. Met adviezen zoals je die ook aan een collega zou kunnen geven: 'Als je hier geen ervaring mee hebt, moet je de opgaven streng selecteren. Kies alleen die voorbeelden waar je zelf echt achter staat.' Niet alleen voor leerlingen is zelfvertrouwen belangrijk!

Veel docenten schrikken terug voor het houden van een 'onderwijsleergesprek'. Zo'n gesprek houd je niet uit de losse pols, je moet het goed voorbereiden, het doel vaststellen dat je wilt bereiken en goede voorbeelden verzinnen. Leerlingen moeten leren zich aan bepaalde spelregels te houden, niet zomaar iets door de klas roepen bijvoorbeeld maar leren naar elkaar te luisteren en in te gaan op wat een ander zegt. Dan kan het pas echt een 'leer'gesprek worden. Er wordt in het boek een aantal knelpunten genoemd die de docent bij het houden van een onderwijsleergesprek tegen kan komen, met mogelijke oplossingen daarvoor. En ook hier geldt: klein beginnen, niet alles ineens willen doen. Ook als docent moet je leren met een dergelijke werkvorm om te gaan.
Al of niet gebruiken van de zakrekenmachine in de klas is nog zo'n heet hangijzer waarover de discussies binnen groepen docenten vaak hoog oplaaien. Eigenlijk kun je er niet goed omheen om de zakrekenmachine te gebruiken. Wat heeft het voor zin om opnieuw te constateren dat deze groep soms grote problemen heeft met rekenen? Kijken wat er allemaal wel kan en succeservaringen mogelijk maken. De rekenmachine integreren in de les en gebruik maken van de extra-mogelijkheden die zo'n apparaat biedt. Over het gebruik van de computer in de les wordt niet gesproken.
Wie in eigen klas iets wil uitproberen vindt een flink aantal werkbladen die zo kunnen worden overgenomen.

Jammer is dat de nadruk zo sterk op het onderdeel rekenen ligt. Daardoor lijkt het toch weer alsof door deze groep leerlingen vooral gerekend moet worden. Lezen van tabellen (dienstregelingen van trein en bus), werken met plattegronden, 'kijkmeetkunde' op dit niveau, er is niets over te vinden. Doe je met deze groep iets aan algebra en zo ja wat is dan zinvol en wat niet meer? Welke meetkunde is geschikt? Hoe sluit je aan bij het beroepsonderwijs dat deze leerlingen krijgen? Kunnen deze leerlingen wel vier jaar lang zinvol wiskundeonderwijs krijgen? En hoe zorg je voor een afsluitende toets met voldoende niveau? Het is duidelijk dat de zorgen voor de docenten die aan deze groep lesgeven nog niet voorbij zijn en dat dit het eerste deeltje hoort te zijn uit een reeks.

Het boekje is schriftelijk te bestellen bij het APS, Postbus 7888, 1008 AB Amsterdam, onder vermelding van nummer 400.014. Prijs *f* 20,–, exclusief verzendkosten.

Truus Dekker

Vreemde woorden in de wiskunde

Minuut (< Lat. *minutum*, onz. van *minutus* = klein; part. perf. pass. van *minuëre* = verkleinen). De sexagesimale breukdelen van de eenheid (1/60; 1/3600) werden in Latijnse vertalingen van Arabische geschriften weergegeven door *prima minuta* (eerste kleine delen) en *secunda minuta* (tweede kleine delen). Het eerste werd tot *minuta* (tweede kleine delen). Het eerste werd tot *minuta*, het tweede tot *secunda* afgekort, zodat men dus eigenlijk van «delen» en van «tweeden» sprak. Hieruit ontstonden onze termen minuut en seconde.

Dijksterhuis en Van der Wielen, 1948.

● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

▶ Opgave 642

Vlak voor Sinterklaas verscheen er een prachtig uitgevoerd puzzelboek: 'Puzzels, klassiek en modern' van Jack Botermans en Jerry Slocom. Dit is het derde boek van Jack in hetzelfde formaat en op hetzelfde principe ('Maak ze zelf en zoek de oplossing') gebaseerd.
De vorige boeken waren: 'Spelen met puzzels' (1978, De Bezige Bij), letterlijk herdrukt als 'Puzzels uit de hele wereld' (1984, Spectrum Hobby). En 'Puzzels, zelf maken en oplossen' (1986, Hema).

Ook het nieuwste boek bevat weer een keur aan manipulatiepuzzels: tangrams, luciferpuzzels, verdeelpuzzels, schuifpuzzels, enz. Het is een prachtig kijkboek geworden met toch wel wat schoonheidsfoutjes: verkeerde spelling van eigennamen, Venlo wordt in Zuid-Limburg gesitueerd, sommige puzzels zijn onmogelijk na te maken omdat de essentiële gegevens ontbreken. Desondanks: wat mij betreft verschijnt spoedig het vierde boek!

Als aanvulling op deze boeken een eigenaardige schuifpuzzel:

D	E	A	D
P	I	G	S
F	L	Y	
T	O	W	N

D	E	A	D
P	I	G	S
W	O	N	T
F	L	Y	

Verschuif de letters in de linker figuur totdat ze liggen zoals in de rechter figuur!

Elke oplossing levert punten op tot een maximum van 5 punten voor de oplossing in het minste aantal zetten.
Een maandlang lees-, kijk- en schuiflezier toegewenst.

▶ Oplossing 639

Beschouw $f_1(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots$
De index 1 geeft aan dat de coëfficiënten per 1-tal van teken wisselen. Bekend is dat $f_1(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$ $= \ln 2$. De vraag was om de waarde van $f_3(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$ uit te rekenen.

De meeste leerboeken voor analyse geven het convergentiekenmerk van Leibniz, waarmee bewezen wordt dat $f_3(1)$ inderdaad convergeert.

Gegeven is dus $f_3(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots$
Gedifferentieerd geeft dit:

$$f'_3(x) = 1 + x + x^2 - x^3 - x^4 - x^5 + \ldots =$$
$$= (1 + x + x^2)(1 - x^3 + x^6 - \ldots) = (1 + x + x^2)\cdot\frac{1}{1 + x^3} =$$
$$= \frac{x^2}{1 + x^3} + \frac{1 + x}{1 + x^3} = \frac{x^2}{1 + x^3} + \frac{1}{x^2 - x + 1} =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2}{1 + x^3} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

Integreren geeft $f_3(x) = \frac{1}{3}\ln|1 + x^3| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$

met $C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$ wegens $f_3(0) = 0$.
Hiermee is $f_3(1)$ bepaald:

$$f_3(1) = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi$$

Hessel Pot (19), Woerden heeft het probleem in 't algemeen bestudeerd en vond o.a.

$$f_2(1) = \tfrac{1}{2}\ln 2 + \tfrac{1}{4}\pi \text{ en } f_4(1) = \tfrac{1}{4}\ln 2 + \frac{1 + 2\sqrt{2}}{8}\pi$$

Velen verzuchtten: 'Dit stukje wiskunde was wel héél erg ver weggezakt'. (*Rini van Bruchem* (9), Lopik).
Helaas is deze rubriek te klein om al uw voorbeelden van convergente reeksen, gebaseerd op de harmonische reeks, te noemen. Desondanks: dank voor al uw reacties!

Met 42 punten staat boven aan de puzzelladder:

Jacques Haubrich
Aeneaslaan 21
5631 LA Eindhoven

De boekenbon van ƒ25,– is je van harte gegund.

• Verenigingsnieuws •



▶ Van de bestuurstafel

Agneta Aukema-Schepel

Het platform VVVO

De NVvW neemt deel in het 'platform Vakinhoudelijke Verenigingen in het Voortgezet Onderwijs'. Dit ontmoetingspunt van besturen heeft als doel:
- uitwisselen van informatie,
- gezamenlijk reageren op ontwikkelingen op vakinhoudelijk gebied (niet op rechtspositioneel gebied, daar zijn de vakbonden voor),
- bewaken en versterken van inspraak bij o.a. examenprogramma's, leerplannen, nascholing en veldadvisering,
- gezamenlijk overleg met het ministerie,
- onderlinge ondersteuning op organisatorisch gebied.

Tijdens de eerste gesprekken op het ministerie is gebleken dat men daar nu, iets meer dan vroeger, bereid is enige openheid van zaken te geven en te luisteren naar de standpunten van het platform.

Een van de zaken waar het platform de laatste tijd mee bezig is geweest, is een reddingspoging van de budgetten van de VALO's[1]. Na 1995 komt er een korting van 20 tot 25% op het budget van de SLO[2]. De VALO's vormen als werkgroepen van de SLO een intermediair tussen de schoolpraktijk en de leerplanontwikkeling. De SLO is van plan de budgetten van de VALO's te halveren. De bruikbaarheid van de SLO-produkten voor de schoolpraktijk wordt duidelijk verhoogd door het werk van deze VALO's, waarvan de leden door de vakinhoudelijke verenigingen worden benoemd. Het platform VVVO probeert nu, door gezamenlijk sterk optreden bij het ministerie en de bestuursraad van de SLO, zulk een onevenredige bezuiniging bij de VALO's te voorkomen.

Verder heeft het platform zich beraden over o.a.
- tweede correctie van de eindexamens,
- nascholing en nascholingsgelden,
- veranderingen in de werkwijze van de CEVO,
- bevoegdheden in de basisvorming,
- het nieuwe inrichtingsbesluit dagscholen vwo-avo-vbo, in verband met de basisvorming,
- profiel van de tweede fase voortgezet onderwijs.

Naar aanleiding van de vervolgnota op dit profiel heeft de Vereniging van Samenwerkende Nederlandse Universiteiten aan de Vaste Kamercommissie gemeld, dat het opdelen van vakken in deelvakken de eenheden te klein maakt, waardoor het onmogelijk wordt om dwarsverbanden aan te brengen. Wij onderschrijven deze mening!

Overdracht Euclides

Tot nu toe was Euclides eigendom van Wolters-Noordhoff (WN). Een werkgroep van bestuursleden en de voorzitter van de redactie overlegt nu met een vertegenwoordiger van WN over de voorwaarden waaronder het eigendomsrecht kan worden overgedragen aan de NVvW. De jaargang '93/'94 zal nog grotendeels op de huidige wijze worden uitgebracht. Intussen onderzoekt het bestuur wat de beste oplossing is voor de verdere toekomst.

Urenaantallen havo, enquête op de studiedag

39 scholen hielpen ons aan het volgende beeld:

urenaantal in 4- plus 5-havo	8	9	10
aantal scholen havo A	32	5	2
aantal scholen havo B	7	11	21

Er blijken heel weinig faciliteiten te zijn om overstappers naar 5 vwo-A bij te werken.

1 VALO = VeldAdvisering LeerplanOntwikkeling
2 SLO = Stichting LeerplanOntwikkeling

● Serie ● ● ● ● ●

'Begrijpen'

▶ Begrijpen door 'aan te sluiten'

Harrie Broekman

Assimileren is het opnemen van een nieuwe ervaring in een bestaand schema. Je zegt dan dat je het begrijpt.
Het kan zijn dat je niet zo'n handig schema gebruikt. Buitenstaanders zeggen dan: 'Je denkt dat je het begrijpt, maar in feite snap je er niets van'.

Bram Lagerwerf, pag. 163

Begrijpen is hetzelfde als assimileren van leerstof in een bestaand schema. Een leerling denkt vaak dat hij iets begrepen heeft, terwijl dat volgens zijn leraar niet het geval is. De leraar heeft ongelijk. De leerling heeft wel degelijk iets begrepen, maar niet op de manier die de leraar bedoelde: niet bedoelde leer-inhouden zijn op een niet bedoelde manier geassimileerd.

Vrij naar Joop van Dormolen, pag. 80

Uit beide citaten komt naar voren dat begrijpen – zoals we allemaal intuïtief wel weten – te maken heeft met 'aansluiten' en 'inpassen'. Maar we weten ook hoe gemakkelijk je je als leraar kunt vergissen, hoe vaak je denkt aan te sluiten maar dat in feite niet doet. Met als gevolg een 'niet begrijpen' van de leerling.
Het volgende voorval is daar een sprekend voorbeeld van.

Jaco van de Pol helpt studenten met een niet-Nederlandse vooropleiding om zich in te passen in de Nederlandse wiskundestudie. Tijdens een van die hulplessen moest hij enige uitleg geven bij het begrip 'talstelsel' en met name het binaire en hexadecimale stelsel. Hij wilde daarbij aansluiten bij hetgeen zijn leerlinge al kende en wat lag daarbij meer voor de hand dan het decimale stelsel?

Jaco: Het lijkt voor de hand liggend, het decimale stelsel is bekend, tweetallig en zestientallig gaan net zo, op enkele details na. De leerlingen zijn wat rekenen in het decimale stelsel betreft goed en zelf vind ik andere stelsels gemakkelijk. Daarom verwacht ik geen enkel probleem.
Maar toch wil het niet lukken. Wat blijkt: als informaticastudent denk ik bij getallen vanzelf al aan stelsels. Een decimaal getal dat ik opschrijf, doet mij denken aan een rij cijfers, elk met een ander gewicht. Die kennis is bij mijn leerlinge in principe wel aanwezig, maar niet op zo'n manier, dat ze dat grondtal 10 direct herkent in 1237.

Ik schrijf direct op:
$1237 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

De leerlinge begint vervolgens ijverig te rekenen of dat nu echt wel klopt. En ja, 'toevallig' klopt het. Ik vergeet uit te leggen hoe ik aan die 1 en die 2 en die 3 en die 7 ben gekomen: ze stonden immers al in het getal 1237.
Ik ga snel naar: 'Zie je wel, hier speelt het grondtal 10 een rol. Je kunt natuurlijk ook iets anders nemen, bijvoorbeeld 2. Wat zou bijvoorbeeld '11001' in het tweetallig stelsel betekenen?' Hé gek, mijn leerlinge weet het niet (gewoon niet goed opgelet natuurlijk, of het is te vroeg op de ochtend of zo). 'Nou kijk, dat is *natuurlijk* $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Nu ligt er weer zoveel nadruk op het automatische, het machinale, dat mijn leerlinge niet zo snel ziet, dat je de vorm die ik net opschreef, ook echt kunt uitrekenen. Er komt *dus* uit: $16 + 8 + 1 = 25$. Ha, denkt de leerlinge, ik snap het nu en ze gaat dus zo verder: $25 = 2 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^0 = 4 + 5 = 9$.

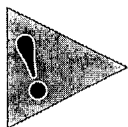
Wat was hier – achteraf gezien – het probleem?
De leerlinge pakte uit de uitleg van Jaco als 'leerresultaat' het mechanisch omzetten van getallen.
Toch probeert Jaco zijn leerlinge een begrip aan te leren. Hij zoekt daartoe bewust naar een aanknopingspunt bij een bekend verondersteld schema.



Daarvoor kiest hij de 'gewone' getallen met hun decimale structuur. Achteraf gezien blijkt dat nu juist verwarring op te roepen doordat zijn leerlinge niet de structuur in de getallen ziet die hij er in ziet.
Jaco zag de getallen als een rijtje cijfers met elk een ander gewicht. Zijn leerlinge zag elk getal als een hoeveelheid. Van de gegeven uitleg neemt zij dan ook over wat zij er van begrijpen kan, namelijk het machinale omzetten.
Dat het 'gewicht' van een cijfer niet alleen afhangt van de plaats maar tevens van het gebruikte talstelsel zal alsnog aan bod moeten komen. Maar dan niet door het uit te leggen begrip (talstelsel) als startpunt te kiezen om bij aan te sluiten. Want dan gaat het weer mis.
De structuur van het decimale stelsel dient het eerste leerdoel te zijn.

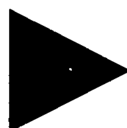
Literatuur

Dormolen, Joop van, *Didactiek van de Wiskunde*, 3e druk, Bohn, Scheltema en Holkema, Utrecht 1981.
Lagerwerf, Bram, *Wiskunde Onderwijs Nu*, Wolters-Noordhoff, Groningen 1982.



Kalender

9 januari 1993: Wintersymposium Wiskundig Genootschap te Amersfoort. Zie blz. 126 van nummer 4.
20 januari 1993: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
10 februari 1993: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
26 en 27 februari 1993: Wiskunde A-lympiade te Garderen.
10 maart 1993: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
12 maart 1993: eerste ronde Wiskunde Olympiade op de scholen voor havo en vwo.
17 september 1993: tweede ronde Wiskunde Olympiade in de Technische Universiteit te Eindhoven.



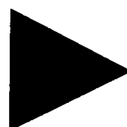
Mededeling

Brochures Keuzebegeleiding Wiskunde A en B op het havo

Evenals vorig jaar zijn de brochures 'Keuzebegeleiding wiskunde A en B op het Havo' te bestellen bij het project Wiskunde en Emancipatie aan de Hogeschool Holland. De inhoud van de brochures is onveranderd gebleven ten opzichte van de twee voorgaande jaren. (Zie Euclides 67-4 op bladzijde 127.)
Bij de brochure voor docenten is een aanvullend schrijven gevoegd waarin een paar wijzigingen zijn opgenomen met betrekking tot de toelatingseisen van verschillende vervolgopleidingen. (U kunt deze aanvulling ook los van de brochures bestellen.)

U kunt de brochures schriftelijk bestellen bij:
Hogeschool Holland, sector HBO-β, Wiskunde & Emancipatie, Wildenborch 6, 1112 XB Diemen, onder vermelding van: naam school, adres school, contactpersoon, aantal leerlingenbrochures à *f* 1,– excl. verzendkosten, aantal docentenbrochures à *f* 2,– excl. verzendkosten.

Voor informatie kunt u op dinsdag en vrijdag, tijdens kantooruren, bellen met de medewerkers van het project Wiskunde & Emancipatie, Hogeschool Holland, tel. 020-560 13 28.



Adressen van auteurs

A. Aukema-Schepel, Buitenplaats 77,
8212 AC Lelystad
F. Ballering e.a., Boerhaavelaan 9,
2334 EB Leiden
R. Bosch, Heiakker 16,
4841 CR Prinsenbeek
H. Broekman, Freudenthal instituut, Tiberdreef 4,
3561 GG Utrecht
G. H. Dekker, Grote Molensteeg 1,
1135 XL Edam
J. Hoffman-Vreugdenhil, Horst 35-08,
8225 NN Lelystad
M. C. van Hoorn, Noordersingel 12,
9901 BP Appingedam
A. Lagerwerf, Dwarsweg 52,
3702 XC Zeist
Sectie Wiskunde Stedelijk Gymnasium Leiden, Fruinlaan 15,
2313 EP Leiden
J. W. van der Vaart, v.d. Mastenstraat 4,
2611 NZ Delft

Inhoud